TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ______________________

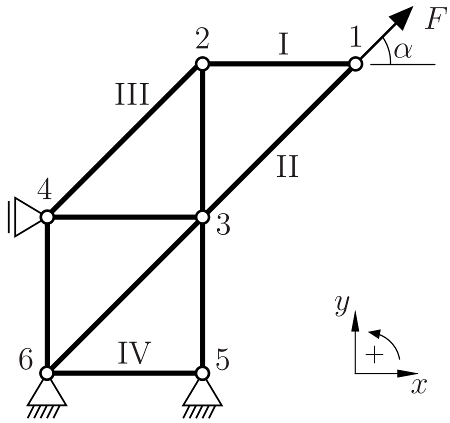
Nachname: ______________________

Matr.-Nr.: ______________________

Aufgabe 1 (Seite 1 von 4)

a)

Das nebenstehende Fachwerk soll mit Hilfe der Finite-Elemente-Methode (FEM) ausgelegt werden. Dazu müssen in einer Eingabedatei verschiedene Eingabegrößen festgelegt werden. Bestimmen Sie die Konnektivitätsliste der mit römischen Zahlen nummerierten Elemente basierend auf den gegebenen Knotennummern. (**1,0 Punkte**)



Elementnummer	globale Knotennummer
I	
II	
III	
IV	

Die Liste aller globalen Freiheitsgrade sei wie folgt geordnet: $\mathbf{u} = [u_x^1, u_y^1, u_x^2, u_y^2, ...]^t$. Bestimmen Sie die Liste `freeDofs`, welche die Freiheitsgradnummern der Neumann-Freiheitsgrade beinhaltet. Geben Sie die dazu korrespondierenden Kräfte $\mathbf{f}_{\text{pre}}$ an. (**1,0 Punkte**)

`freeDoFs` $= [$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $]$

$\mathbf{f}_{\text{pre}}$ $= [$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $]$

Für das oben abgebildete Fachwerk erfolgt die Diskretisierung anhand von einem Element pro Stab. Geben Sie die Dimension der Element-Steifigkeitsmatrizen $\mathbf{K}^e$ der Elemente an. (**0,5 Punkte**)

Anzal Zeilen: $\qquad\qquad$ Anzahl Spalten:

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

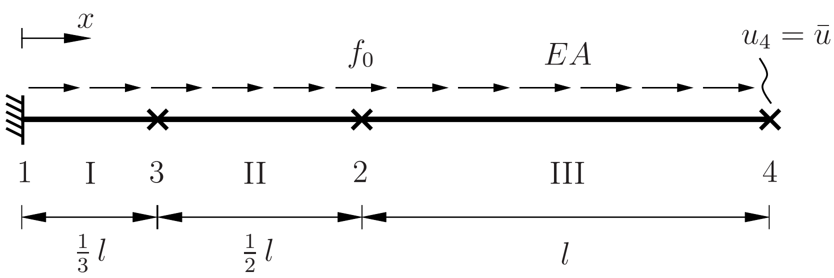
Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 1 (Seite 2 von 4)

b)

Es soll nun mittels der FEM ein Stab (Elastizitätsmodul E, Querschnittsfläche A) bestehend aus drei Elementen berechnet werden. Der Stab ist am Knoten 1 wie dargestellt gelagert. An Knoten 4 wird die Verschiebung $u_4 = \bar{u}$ aufgeprägt. Der Stab wird durch eine konstante volumenbezogene Last f_0 belastet. Die Diskretisierung erfolgt mit linearen Ansatzfunktionen. Für die Gauß-Quadratur wird ein Gaußpunkt pro Element verwendet.



Die Elementvektoren der Volumenkräfte der drei Elemente sind bestimmt worden zu

$$\boldsymbol{f}^{e=I}_{\text{vol}} = \frac{1}{6}\,A\,l\,f_0 \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{f}^{e=II}_{\text{vol}} = \frac{1}{4}\,A\,l\,f_0 \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{f}^{e=III}_{\text{vol}} = \frac{1}{2}\,A\,l\,f_0 \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}.$$

Assemblieren Sie diese zum globalen Vektor der Volumenkräfte $\mathbf{f}_{\text{vol}}$. Beachten Sie die durch die Skizze vorgegebene Konnektivität. **(1,0 Punkte)**

$\mathbf{f}_{\text{vol}} =$

Bestimmen Sie die Element-Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}^{e=\text{III}}$ von Element III. **(1,5 Punkte)**

$\mathbf{K}^{e=\text{III}} =$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

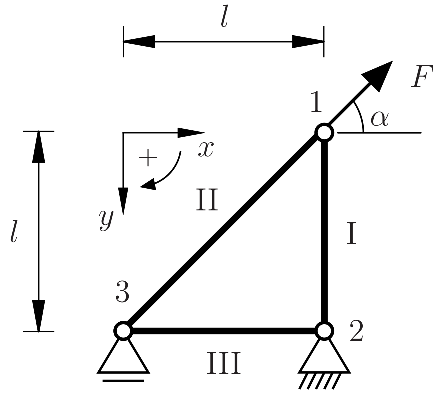
Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 1 (Seite 3 von 4)

c)

Für das nebenstehende reduzierte Fachwerk bestehend aus drei Stäben (Elastizitätsmodul E, Querschnittsfläche A) ist die Liste aller globalen Freiheitsgrade wie folgt geordnet: $\mathbf{u} = [u_x^1, u_y^1, u_x^2, u_y^2, ...]^t$, sodass $\texttt{drltDofs} = [3, 4, 6]$ und $\texttt{freeDofs} = [1, 2, 5]$. Die globale Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}$ und die Verschiebungen $\mathbf{u}_F$ wurden bereits mit $a = \sqrt{2}/4$ bestimmt zu



$$\mathbf{K} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} a & -a & 0 & 0 & -a & a \\ -a & 1+a & 0 & -1 & a & -a \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -a & a & -1 & 0 & 1+a & -a \\ a & -a & 0 & 0 & -a & a \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_F = \frac{l}{EA} \begin{bmatrix} [2+\frac{1}{a}]F_x + F_y \\ F_x + F_y \\ F_x \end{bmatrix}.$$

Extrahieren Sie die Matrizen $\mathbf{K}_{DF}$ und $\mathbf{K}_{DD}$ aus der Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}$. (**1,0 Punkte**)

$\mathbf{K}_{DF} =$

$\mathbf{K}_{DD} =$

Geben Sie die Gleichung zur Bestimmung der unbekannten Reaktionskräfte $\mathbf{f}_{\mathrm{sur}\,D}$ an. Bestimmen Sie zusätzlich darin enthaltene unbekannten Größen anhand des oben abgebildeten Systems. Das Ergebnis muss **nicht** berechnet werden. (**0,5 Punkte**)

$\mathbf{f}_{\mathrm{sur}\,D} =$

Geben Sie eine Möglichkeit zur Verifizierung des obigen Ergebnisses der Reaktionskräfte $\mathbf{f}_{\mathrm{sur}\,D}$ für das gegebene System an. (**0,5 Punkte**)

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

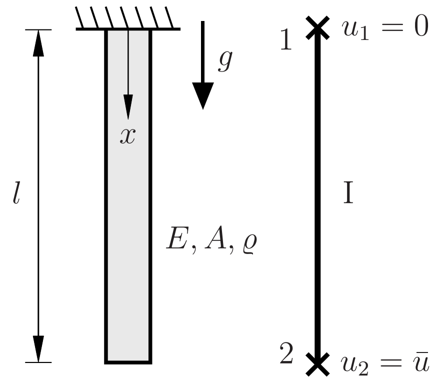
Aufgabe 1 (Seite 4 von 4)

d)

Es soll nun in einem der FEM nachgeschalteten Schritt für den nebenstehenden Stab die aufgenommene interne elastische Energie

$$\Pi_{\text{int}} \approx \Pi^h_{\text{int}} = \sum_{e=1}^{n_{\text{el}}} \left[\int_{\mathcal{B}^e} \frac{1}{2}\, EA \left[\frac{\mathrm{d}u^h(x)}{\mathrm{d}x} \right]^2 \mathrm{d}x \right]$$

bestimmt werden. Die Diskretisierung des Stabes erfolgt mit einem Element. Die Verschiebungen $u_1 = 0$ und $u_2 = \bar{u}$ sind bereits bekannt.



Geben Sie die Koordinatentransformation $x^h(\xi)$ auf das Masterelement für das oben abgebildete System unter der Verwendung von linearen Ansatzfunktionen an. Geben Sie zudem die inverse Funktion $\xi^h(x)$ an. **(1,0 Punkte)**

$x^h(\xi) =$ $\qquad\qquad$ $\xi^h(x) =$

Geben Sie die Interpolationsfunktion des Verschiebungsfeldes $u^h(\xi)$ auf dem Masterelement für das oben abgebildete System unter der Verwendung von linearen Ansatzfunktionen an. Geben Sie zudem die Ableitung des Verschiebungsfeldes $u^h(\xi)$ bzgl. x an. **(1,0 Punkte)**

$u^h(\xi) =$ $\qquad\qquad$ $\dfrac{\mathrm{d}u^h(\xi)}{\mathrm{d}x} =$

Transformieren Sie das Integral der internen elastischen Energie auf das Masterelement und wenden Sie die Gauß-Quadratur an. Eine allgemeine Formel ist ausreichend. Das Ergebnis muss **nicht** berechnet werden. **(1,0 Punkte)**

$$\int_{\mathcal{B}^e} \frac{1}{2}\, E\, A \left[\frac{\mathrm{d}u^h(x)}{\mathrm{d}x} \right]^2 \mathrm{d}x =$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

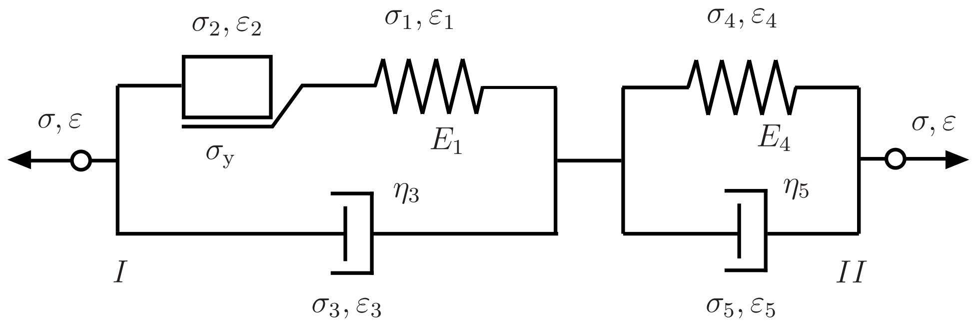
Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 2 (Seite 1 von 4)

a)

Das dargestellte rheologische Modell mit den Elastizitätsmoduli E_1 und E_4, den Dämpfungskonstanten η_3 und η_5 und der Fließgrenze σ_y wird im Folgenden betrachtet. Die den jeweiligen Teilkörpern zugehörigen Spannungen und Dehnungen $\sigma_\bullet$ und $\varepsilon_\bullet$ mit $\bullet = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ sind der Skizze zu entnehmen.



Geben Sie zunächst die Spannung σ_4 und Dehnung ε_4 in der rechten Feder in Abhängigkeit der Größen $\sigma_1, \sigma_3, \sigma_5$ und $\varepsilon, \varepsilon_3$ an. **(1,5 Punkte)**

$\sigma_4(\sigma_1, \sigma_3, \sigma_5) =$

$\varepsilon_4(\varepsilon, \varepsilon_3) =$

Gesucht ist nun eine konstitutive Gleichung für die Gesamtspannung σ. Stellen Sie je eine Gleichung für σ anhand der Schaltung der Elemente $1, 2, 3$ (I) sowie anhand der Schaltung der Elemente $4, 5$ (II) in Abhängigkeit der Größen $\varepsilon, \dot{\varepsilon}, \varepsilon_1, \dot{\varepsilon}_1, \varepsilon_4, \dot{\varepsilon}_4$ auf. **(2,0 Punkte)**

$I: \quad \sigma =$

$II: \quad \sigma =$

Das oben dargestellte rheologische Modell lässt sich auf den Bingham-Hooke-Körper durch die Festlegung von zwei Materialparametern reduzieren. Nennen Sie diese beiden Materialparameter und geben Sie jeweils einen Wert an. **(1,0 Punkte)**

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

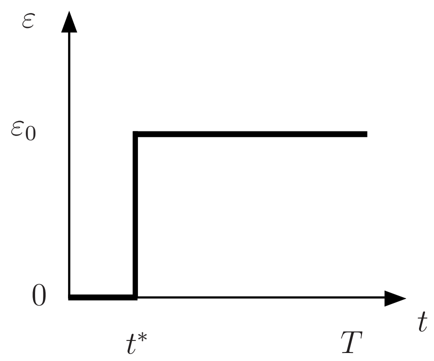
Aufgabe 2 (Seite 2 von 4)

b)

Die Gleichungen zur Lösung eines Bingham-Hooke-Körpers seien als

$$
\begin{aligned}
\sigma = E\,\varepsilon \quad &\text{für} \quad \sigma < \sigma_{\mathrm{y}} \\
\sigma + \eta\,\dot{\sigma}/E = \eta\,\dot{\varepsilon} + \sigma_{\mathrm{y}} \quad &\text{für} \quad \sigma \geq \sigma_{\mathrm{y}}
\end{aligned}
$$

mit als bekannt vorausgesetzten Materialparametern gegeben. Das System sei mit einer zum Zeitpunkt $t = t^*$ sprunghaft ansteigenden Dehnung $\varepsilon(t)$ mit $\varepsilon_0 = 2\,\sigma_{\mathrm{y}}/E$ wie dargestellt belastet.



Berechnen Sie für diesen Belastungszustand die Lösungen $\sigma(t)$ in den Bereichen $0 \leq t < t^*$ und $t^* < t \leq T$. Konstanten aus Anfangsbedingungen müssen nicht bestimmt werden. Geben Sie im nachfolgenden Kästchen alle wichtigen Zwischenschritte an. **(2,5 Punkte)**

Der Bingham-Hooke-Körper lässt sich auf den Prandtl-Körper durch Festlegung eines Materialparameters reduzieren. Nennen Sie diesen Materialparameter und geben Sie dessen Wert an. **(0,5 Punkte)**

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

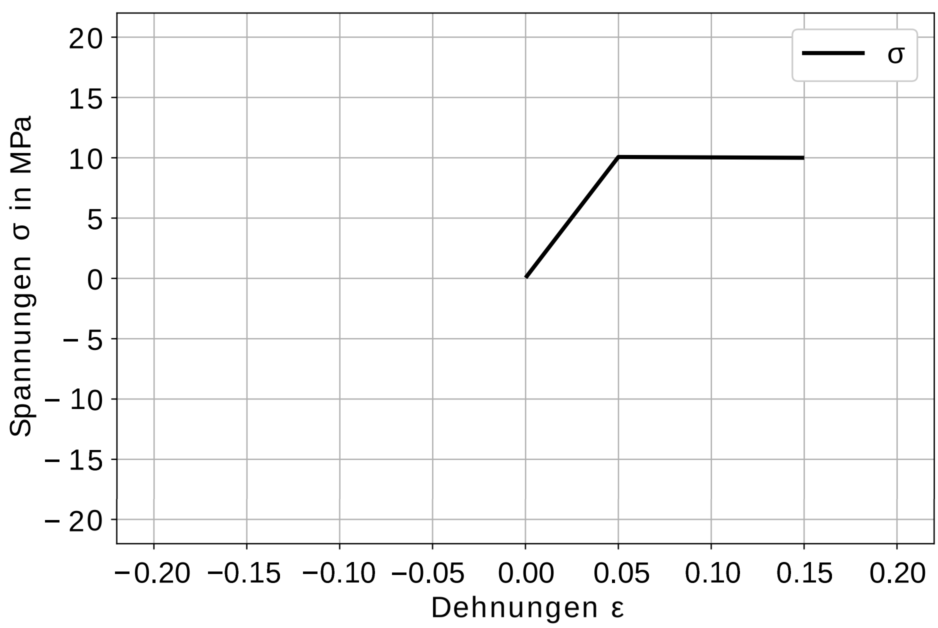
Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 2 (Seite 3 von 4)

c)

Im Rahmen eines Belastungstests wurde der Dehnungsverlauf $\varepsilon(t)$ für ein anderes Material, welches durch den Prandtl-Körper beschrieben werden kann, mithilfe eines Dehnungsmessstreifens wie folgt gemessen:

Die zugehörige Spannungs-Dehnungs-Kurve, die während des Tests aufgezeichnet wurde, ist im Folgenden dargestellt. Die Kurve wurde allerdings nicht bis zum Ende des Versuchs aufgezeichet. Vervollständigen Sie die Spannungs-Dehnungs-Kurve bis zum Ende des Tests anhand der gegebenen Dehnungskurve. **(1,5 Punkte)**



TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 2 (Seite 4 von 4)

Geben Sie den Elastizitätsmodul E und die Fließgrenze σ_y des Materials an. (**1,0 Punkte**)

$E =$

$\sigma_\mathrm{y} =$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 3 (Seite 1 von 4)

a)

Für einen ebenen Spannungszustand eines linear elastischen Materials ist die folgende Airysche Spannungsfunktion gegeben

$$F = C_1\, x^5\, y + C_2\, x^3\, y^3\,.$$

Berechnen Sie die Spannungen σ_{xx}, σ_{xy} und σ_{yy} ohne die Konstanten C_1 und C_2 zu spezifizieren. **(1,5 Punkte)**

$\sigma_{xx} =$

$\sigma_{xy} =$

$\sigma_{yy} =$

Prüfen Sie, ob dem Spannungszustand eindeutig ein Verschiebungsfeld zugeordnet werden kann. Geben Sie das entsprechende Kriterium an und bestimmen Sie ggf. das nötige Verhältnis der Konstanten C_1/C_2. **(1,5 Punkte)**

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

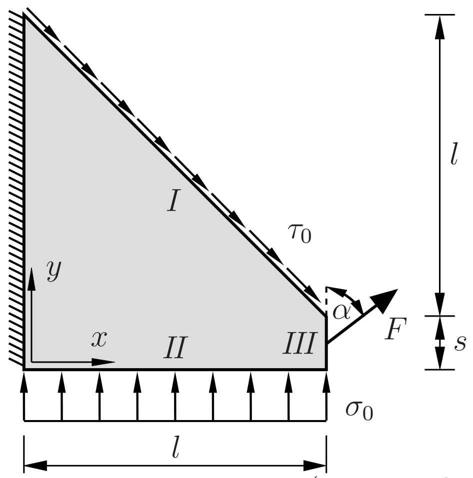
Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 3 (Seite 2 von 4)

b)

Die nebenstehend skizzierte Scheibe der Dicke t ist auf der linken Seite eingespannt und wird wie dargestellt durch Traktionen τ_0 auf Rand I und σ_0 auf Rand II belastet. Die Kraft F wirkt auf Rand III und greift unter dem Winkel α an. Es liegt ein ebener Spannungszustand vor.

Geben Sie sämtliche Spannungs-Randbedingungen des Systems für die Ränder I, II und III an. Nennen Sie dazu auch die Definitionsbereiche für x und y der jeweiligen Spannungskomponenten.



(3,0 Punkte)

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 3 (Seite 3 von 4)

c)

Für ein anderes nicht näher spezifiziertes System sei die Schubspannung

$$\sigma_{13} = -C_1\, x_3^2 - \frac{C_2}{2}$$

berechnet worden. Es gelten außerdem die Spannungsrandbedingungen

$$\sigma_{13}(x_1, x_3 = h) = 0\,, \qquad \int_0^h \sigma_{13}(x_1 = 0, x_3)\, b\, \mathrm{d}x_3 = R\,,$$

wobei b konstant ist.

Bestimmen Sie die Konstanten C_1 und C_2. **(2,0 Punkte)**

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 3 (Seite 4 von 4)

d)

Für ein isotropes und linear-elastisches Material (Lamé Parameter λ und μ) wurde ein Verzerrungstensor mit der Koeffizientendarstellung

$$[\boldsymbol{\varepsilon}]_{\boldsymbol{e}_{1,2,3}} = \begin{bmatrix} 20\,a\,x_2\,x_1 & 5\,b\,x_1^2 + 3\,a\,x_1\,x_2 & 0 \\ 5\,b\,x_1^2 + 3\,a\,x_1\,x_2 & 6\,b\,x_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

bestimmt.
Prüfen Sie, für welche Beziehung zwischen den Konstanten a und b sich aus dem gegebenen Verzerrungszustand eindeutig ein zugehöriges Verschiebungsfeld bestimmen lässt. **(1,0 Punkte)**

Geben Sie den zugehörigen Spannungszustand in Koeffizientendarstellung für den Punkt $x_1 = 1$ und $x_2 = 1$ an. **(1,0 Punkte)**