TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 1 (Seite 1 von 3)

a)
Gegeben sei der folgende Dehnungszustand:

$$[\boldsymbol{\varepsilon}]_{x,y,z} = \begin{bmatrix} -0.25\,a & b & 0 \\ b & -0.25\,a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} .$$

Bestimmen Sie zunächst die Hauptdehnungen (Reihenfolge irrelevant). (**2,0 Punkte**)

$$\varepsilon_1 = a$$

$$\varepsilon_2 = -0.25\,a + b$$

$$\varepsilon_3 = -0.25\,a - b$$

Bestimmen Sie nun die aus der Vorlesung bekannten Hauptinvarianten J_1, J_2 und J_3 für den vorliegenden Dehnungszustand. (**1,5 Punkte**)

$$J_1 = 0.5\,a$$

$$J_2 = -\frac{7}{16}\,a^2 - b^2$$

$$J_3 = a\left(\frac{1}{16}\,a^2 - b^2\right)$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 1 (Seite 2 von 3)

b)
Für einen Körper wurde das folgende Verschiebungsfeld ermittelt:

$$[\boldsymbol{u}]_{x,y,z} = \frac{u_0}{l} \begin{bmatrix} -5\,x - 4\,z \\ y - 4\,z \\ 10\,z \end{bmatrix} .$$

Bestimmen Sie den dazugehörigen deviatorischen und sphärischen Spannungszustand unter der Annahme linearer, isotroper Elastizität (Lamé-Parameter λ und μ). (**2,5 Punkte**)

$$\left[\boldsymbol{\sigma}^{\text{sph}}\right]_{x,y,z} = 6\left(\lambda + \frac{2}{3}\,\mu\right)\frac{u_0}{l}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left[\boldsymbol{\sigma}^{\text{dev}}\right]_{x,y,z} = 2\,\mu\frac{u_0}{l}\begin{bmatrix} -7 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & 8 \end{bmatrix}$$

c)
Bei einem **equi-biaxialem Zugversuch** (zweiachsig) tritt der folgende Dehnungszustand auf:

$$[\boldsymbol{\varepsilon}]_{x,y,z} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix} .$$

Bestimmen Sie die Dehnungskomponente b in Abhängigkeit von a unter der Annahme von linear-elastischem, isotropem Materialverhalten für die Fälle $\nu = 0$ und $\nu = 0.5$. (**1,0 Punkte**)

$$\nu = 0.5 \Rightarrow b = -2\,a$$
$$\nu = 0 \quad \Rightarrow b = 0$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

d)
Für ein anderes unbeschleunigtes System wird nun die folgende Funktion für den Spannungstensor vorgegeben:

$$[\boldsymbol{\sigma}]_{x,y,z} = \begin{bmatrix} \dfrac{\sigma_0}{l^2}\, y\, z & 0 & 0 \\ 0 & 2\, c_3\, y^2 + c_1\, y\, z & -\dfrac{12\,\sigma_0}{l^2}\,(y\, z + z^2) \\ 0 & -\dfrac{12\,\sigma_0}{l^2}\,(y\, z + z^2) & c_2\, z^2 \end{bmatrix} .$$

Für die Volumenkräfte gelte $[\boldsymbol{f}]_{x,y,z} = \boldsymbol{0}$.

Bestimmen Sie die Konstanten c_1, c_2 und c_3 so, dass für alle Werte von x, y und z Gleichgewicht herrscht. **(3,0 Punkte)**

$$c_1 = 24\frac{\sigma_0}{l^2}$$

$$c_2 = 6\frac{\sigma_0}{l^2}$$

$$c_3 = 3\frac{\sigma_0}{l^2}$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

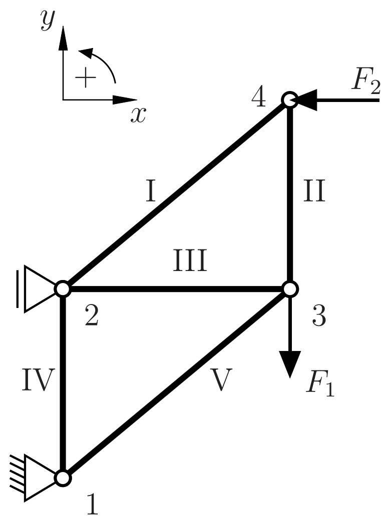
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 2 (Seite 1 von 5)

a) Das nebenstehende Fachwerk soll mit Hilfe der Finite-Elemente-Methode (FEM) ausgelegt werden. Dazu müssen in einer Eingabedatei verschiedene Eingabegrößen festgelegt werden.
Bestimmen Sie die Konnektivitätsliste der Elemente basierend auf den gegebenen Element- und Knotennummern. (**1,0 Punkte**)



Elementnummer	globale Knotennummer
I	2,4
II	3,4
III	2,3
IV	1,2
V	1,3

Die Liste aller globalen Freiheitsgrade sei wie folgt geordnet: $\mathbf{u} = [u_x^1, u_y^1, u_x^2, u_y^2, ...]^t$. Bestimmen Sie die Liste `drltDofs`, welche die Freiheitsgradnummern der Dirichlet-Freiheitsgrade beinhaltet. Geben Sie die dazu korrespondierenden Verschiebungen $\mathbf{u}_D$ an. (**1,0 Punkte**)

$\texttt{drltDoFs} = [1, 2, 3]$

$\mathbf{u}_D = [0, 0, 0]$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 2 (Seite 2 von 5)

Bestimmen Sie die Liste `freeDofs`, welche die Freiheitsgradnummern der Neumann-Freiheitsgrade beinhaltet. Geben Sie die dazu korrespondierenden Kräfte $\mathbf{f}_{pre}$ an. (**1,0 Punkte**)

$\texttt{freeDoFs} = [4, 5, 6, 7, 8]$

$\mathbf{f}_{\text{pre}} \quad = [0, 0, -F_1, -F_2, 0]$

Für die Approximation der Verschiebungen eines Stabelements werden lineare Ansatzfunktionen und als Integrationsverfahren die Gauss-Quadratur gewählt. Wie viele Gausspunkte n_{qp} sollten für die Gauss-Quadratur verwendet werden? Begründen Sie Ihre Antwort kurz. (**0,5 Punkte**)

Ein einzelner Gauss-Punkt reicht aus, da die Deformation in jedem Stab homogen ist. Zusätzliche Gauss-Punkte bringen daher keine zusätzliche Genauigkeit bei der Integration.

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

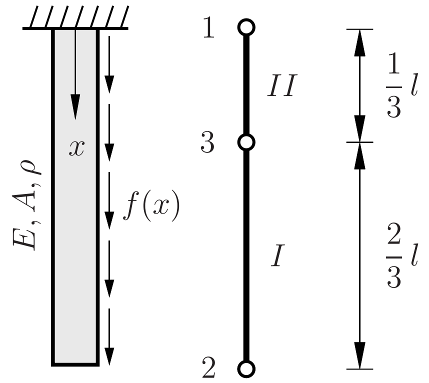
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 2 (Seite 3 von 5)

b)
Als nächstes soll das Verschiebungsfeld eines Stabs der Länge l (Elastizitätsmodul E, Querschnittsfläche A) mittels FEM berechnet werden. Der Stab wird durch eine (volumenbezogene) Last $f(x) = f_0\, x/l$ belastet. Die Diskretisierung erfolgt mit 2 Elementen und den linearen Ansatzfunktionen $N^1(\xi) = \frac{1}{2}[1-\xi]$, $N^2(\xi) = \frac{1}{2}[1+\xi]$. Für die Gauss-Quadratur wird ein Gausspunkt verwendet.



Die Elementsteifigkeitsmatrizen $\mathbf{K}^e$ wurden bereits bestimmt und lauten

$$\mathbf{K}^{e=I} = \frac{3}{4}\frac{EA}{l}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \;,\quad \mathbf{K}^{e=II} = \frac{3}{2}\frac{EA}{l}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \;.$$

Außerdem wurden die Beiträge der Elemente zum Vektor der Volumenkräfte $\mathbf{f}_{\mathrm{vol}}$ bestimmt:

$$\mathbf{f}_{\mathrm{vol}}^{e=I} = \frac{1}{18}A\,l\,f_0\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \;,\quad \mathbf{f}_{\mathrm{vol}}^{e=II} = \frac{1}{9}A\,l\,f_0\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \;.$$

Bestimmen Sie die globale Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}$. Beachten Sie die durch die Skizze vorgegebene Konnektivität. **(1,5 Punkte)**

$$\mathbf{K} = \frac{3}{4}\frac{EA}{l}\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Bestimmen Sie den globalen Vektor der Volumenkräfte $\mathbf{f}_{\mathrm{vol}}$. Beachten Sie die durch die Skizze vorgegebene Konnektivität. **(1,0 Punkte)**

$$\mathbf{f}_{\mathrm{vol}} = \frac{1}{18}A\,l\,f_0\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

TU Dortmund

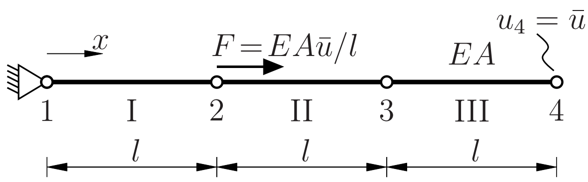
Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

c)
Es soll nun mittels FEM ein weiteres System aus mehreren (eindimensionalen) Stäben berechnet werden. An Knoten 4 wird die Verschiebung $u_4 = \bar{u}$ aufgeprägt. Das System wird außerdem an Knoten 2 durch eine Einzelkraft $F = EA\bar{u}/l$ belastet.



Die globale Steifigkeitsmatrix des Systems wurde bereits zu

$$\mathbf{K} = \frac{EA}{l}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

bestimmt.
Bestimmen Sie die Submatrizen $\mathbf{K}_{FF}$, $\mathbf{K}_{FD}$, $\mathbf{K}_{DF}$ und $\mathbf{K}_{DD}$, welche sich auf die freien (F) bzw. die Dirichlet-Freiheitsgrade (D) beziehen. **(1,0 Punkte)**

$$\mathbf{K}_{FF} = \frac{EA}{l}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{K}_{FD} = \frac{EA}{l}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{DF} = \frac{EA}{l}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{K}_{DD} = \frac{EA}{l}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ______________________

Nachname: ______________________

Matr.-Nr.: ______________________

Aufgabe 2 (Seite 5 von 5)

Geben Sie die Verschiebungen $\mathbf{u}_D$ an den Dirichlet-Freiheitsgraden an. (**0,5 Punkte**)

$$\mathbf{u}_D = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{u} \end{bmatrix}$$

Geben Sie die externen Kräfte $\mathbf{f}_{\mathrm{sur},F}$ an den Neumann-Freiheitsgraden an. (**0,5 Punkte**)

$$\mathbf{f}_{\mathrm{sur},F} = \begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix}$$

Bestimmen Sie nun die unbekannten Verschiebungen $\mathbf{u}_F$. (**1,5 Punkte**)

$$\mathbf{u}_F = \bar{u} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Geben Sie die Gleichung zur Bestimmung der unbekannten Reaktionskräfte $\mathbf{f}_{\mathrm{sur},D}$ an. Das Ergebnis muss *nicht* berechnet werden. (**0,5 Punkte**)

$$\mathbf{f}_{\mathrm{sur},D} = \mathbf{K}_{DF} \cdot \mathbf{u}_F + \mathbf{K}_{DD} \cdot \mathbf{u}_D$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

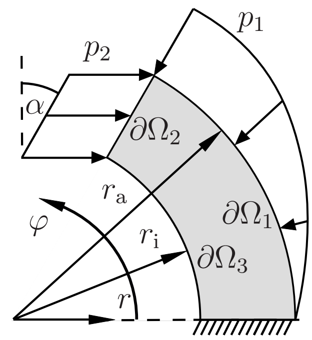
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 3 (Seite 1 von 3)

a)
Der nebenstehende Bestandteil einer Ringscheibe konstanter Dicke ist am unteren Rand fest eingespannt. Über den Rand $\partial\Omega_1$ wirkt in radiale Richtung eine über den Winkel aufgetragen linear zunehmende Flächenenlast mit Maximalwert p_1. Auf Rand $\partial\Omega_2$ wirkt horizontal eine konstante Flächenenlast p_2. Der Winkel α beträgt $\frac{1}{6}\pi$. Geben Sie alle Spannungsrandbedingungen der Ränder $\partial\Omega_1$, $\partial\Omega_2$ und $\partial\Omega_3$ an. (**3,0 Punkte**)



$\partial\Omega_1(r = r_\mathrm{a}, \varphi) : \sigma_\mathrm{rr} = -\frac{3}{\pi} p_1\, \varphi, \quad \sigma_{\mathrm{r}\varphi} = 0$

$\partial\Omega_2(r, \varphi = \frac{1}{3}\pi) : \sigma_{\varphi\varphi} = -\cos(\frac{1}{6}\pi)\, p_2, \quad \sigma_{\mathrm{r}\varphi} = \sin(\frac{1}{6}\pi)\, p_2$

$\partial\Omega_3(r = r_\mathrm{i}, \varphi) : \sigma_\mathrm{rr} = 0, \quad \sigma_{\mathrm{r}\varphi} = 0$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 3 (Seite 2 von 3)

Für eine andere Belastung, die lediglich an Rand $\partial\Omega_2$ wirkt ($p_1 = 0$, $p_2 \neq 0$), stellt sich für das System folgender Spannungszustand im gegebenen polaren Koordinatensystem ein

$$[\boldsymbol{\sigma}]_{r,\varphi} = \begin{bmatrix} (2\,A\,r + \frac{B}{r})\,e^{\varphi} & 0 \\ 0 & (A\,r^2 - \frac{2\,B}{r})e^{\varphi - \frac{1}{3}\pi} \end{bmatrix}.$$

Die Konstanten A und B sind als bekannt anzunehmen. Geben Sie die Spannungsvektoren für die Ränder $\partial\Omega_2$ und $\partial\Omega_3$ in Polarkoordinaten an. **(2,0 Punkte)**

$$\boldsymbol{t}_2^* = \begin{bmatrix} 0 \\ A\,r^2 - \frac{2\,B}{r} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{t}_3^* = \begin{bmatrix} -\left[2\,A\,r_i + \frac{B}{r_i}\right]\,e^{\varphi} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Bestimmen Sie den Zusammenhang zwischen den beiden Konstanten A und B an. **(1,0 Punkte)**

$$A = -\frac{B}{2\,r_\mathrm{i}^2} \qquad B = -2\,A\,r_\mathrm{i}^2$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 3 (Seite 3 von 3)

b)
Gegeben sei der folgende ebene Spannungszustand:

$$[\boldsymbol{\sigma}]_{x,y,z} = \begin{bmatrix} -a^2 e^{-a\,y} & -c\,\cos(c\,x) + d & 0 \\ -c\,\cos(c\,x) + d & b\,x^2 - c^2 y\,\sin(c\,x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Bestimmen Sie **eine** Airysche Spannungsfunktion $F(x,y)$, welche auf den angegeben Spannungszustand führt. **(3,0 Punkte)**

$$F(x,y) \quad = -e^{-ay} + \tfrac{1}{12}\,b\,x^4 + y\sin(c\,x) - d\,x\,y$$

Für eine Airysche Spannungsfunktion wird der Ansatz $F(x,y) = a\,x^m + b\,y^n + c$ gewählt. Welchen ganzzahligen, positiven Wert dürfen die Parameter m und n maximal annehmen, damit $F(x,y)$ für positive Koeffizienten a, b und c einen zulässigen Ansatz darstellt? Begründen Sie ihre Antwort. **(1,0 Punkte)**

m,n ≤ 3, da sonst die Kompabilität nicht erfüllt ist.