

Aufgabe 1 (Seite 1 von 3)

a)

Gegeben sei der folgende Dehnungszustand:

$$[\varepsilon]_{x,y,z} = \begin{bmatrix} -0.25 a & b & 0 \\ b & -0.25 a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} .$$

Bestimmen Sie zunächst die Hauptdehnungen (Reihenfolge irrelevant). **(2,0 Punkte)**

$$\varepsilon_1 =$$

$$\varepsilon_2 =$$

$$\varepsilon_3 =$$

Bestimmen Sie nun die aus der Vorlesung bekannten Hauptinvarianten J_1 , J_2 und J_3 für den vorliegenden Dehnungszustand. **(1,5 Punkte)**

$$J_1 =$$

$$J_2 =$$

$$J_3 =$$

Aufgabe 1 (Seite 2 von 3)

b)

Für einen Körper wurde das folgende Verschiebungsfeld ermittelt:

$$[\mathbf{u}]_{x,y,z} = \frac{u_0}{l} \begin{bmatrix} -5x - 4z \\ y - 4z \\ 10z \end{bmatrix} .$$

Bestimmen Sie den dazugehörigen deviatorischen und sphärischen Spannungszustand unter der Annahme linearer, isotroper Elastizität (Lamé-Parameter λ und μ). **(2,5 Punkte)**

	=	$\left[\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right]$
	=	$\left[\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right]$

c)

Bei einem **equi-biaxialem Zugversuch** (zweiachsig) tritt der folgende Dehnungszustand auf:

$$[\boldsymbol{\varepsilon}]_{x,y,z} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix} .$$

Bestimmen Sie die Dehnungskomponente b in Abhängigkeit von a unter der Annahme von linear-elastischem, isotropem Materialverhalten für die Fälle $\nu = 0$ und $\nu = 0.5$. **(1,0 Punkte)**

$\nu = 0.5 \Rightarrow b =$	
$\nu = 0 \Rightarrow b =$	

Aufgabe 1 (Seite 3 von 3)

d)

Für ein anderes unbeschleunigtes System wird nun die folgende Funktion für den Spannungstensor vorgegeben:

$$[\boldsymbol{\sigma}]_{x,y,z} = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_0}{l^2} y z & 0 & 0 \\ 0 & 2 c_3 y^2 + c_1 y z & -\frac{12 \sigma_0}{l^2} (y z + z^2) \\ 0 & -\frac{12 \sigma_0}{l^2} (y z + z^2) & c_2 z^2 \end{bmatrix} .$$

Für die Volumenkräfte gelte $[\mathbf{f}]_{x,y,z} = \mathbf{0}$.

Bestimmen Sie die Konstanten c_1 , c_2 und c_3 so, dass für alle Werte von x , y und z Gleichgewicht herrscht. **(3,0 Punkte)**

$$c_1 =$$

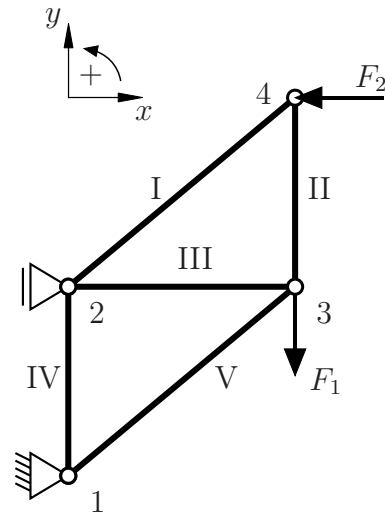
$$c_2 =$$

$$c_3 =$$

Aufgabe 2 (Seite 1 von 5)

a) Das nebenstehende Fachwerk soll mit Hilfe der Finite-Elemente-Methode (FEM) ausgelegt werden. Dazu müssen in einer Eingabedatei verschiedene Eingabegrößen festgelegt werden.

Bestimmen Sie die Konnektivitätsliste der Elemente basierend auf den gegebenen Element- und Knotennummern. **(1,0 Punkte)**



Elementnummer	globale Knotennummer
I	
II	
III	
IV	
V	

Die Liste aller globalen Freiheitsgrade sei wie folgt geordnet: $\mathbf{u} = [u_x^1, u_y^1, u_x^2, u_y^2, \dots]^t$. Bestimmen Sie die Liste `dr1tDofs`, welche die Freiheitsgradnummern der Dirichlet-Freiheitsgrade beinhaltet. Geben Sie die dazu korrespondierenden Verschiebungen \mathbf{u}_D an. **(1,0 Punkte)**

<code>dr1tDofs</code>	= []
\mathbf{u}_D	= []

Aufgabe 2 (Seite 2 von 5)

Bestimmen Sie die Liste `freeDofs`, welche die Freiheitsgradnummern der Neumann-Freiheitsgrade beinhaltet. Geben Sie die dazu korrespondierenden Kräfte \mathbf{f}_{pre} an.
(1,0 Punkte)

`freeDofs` = [_____]

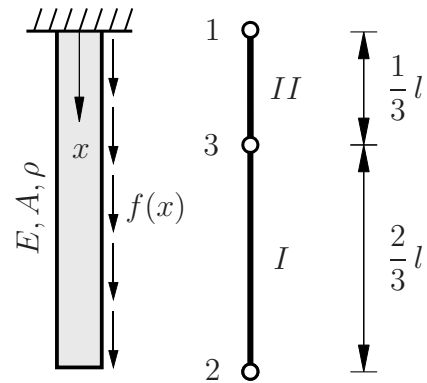
\mathbf{f}_{pre} = [_____]

Für die Approximation der Verschiebungen eines Stabelements werden lineare Ansatzfunktionen und als Integrationsverfahren die Gauss-Quadratur gewählt. Wie viele Gausspunkte n_{qp} sollten für die Gauss-Quadratur verwendet werden? Begründen Sie Ihre Antwort kurz.
(0,5 Punkte)

Aufgabe 2 (Seite 3 von 5)

b)

Als nächstes soll das Verschiebungsfeld eines Stabs der Länge l (Elastizitätsmodul E , Querschnittsfläche A) mittels FEM berechnet werden. Der Stab wird durch eine (volumenbezogene) Last $f(x) = f_0 x/l$ belastet. Die Diskretisierung erfolgt mit 2 Elementen und den linearen Ansatzfunktionen $N^1(\xi) = \frac{1}{2} [1 - \xi]$, $N^2(\xi) = \frac{1}{2} [1 + \xi]$. Für die Gauss-Quadratur wird ein Gausspunkt verwendet.



Die Elementsteifigkeitsmatrizen \mathbf{K}^e wurden bereits bestimmt und lauten

$$\mathbf{K}^{e=I} = \frac{3EA}{4l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}^{e=II} = \frac{3EA}{2l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Außerdem wurden die Beiträge der Elemente zum Vektor der Volumenkräfte \mathbf{f}_{vol} bestimmt:

$$\mathbf{f}_{\text{vol}}^{e=I} = \frac{1}{18} Al f_0 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_{\text{vol}}^{e=II} = \frac{1}{9} Al f_0 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Bestimmen Sie die globale Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} . Beachten Sie die durch die Skizze vorgegebene Konnektivität. (1,5 Punkte)

$\mathbf{K} =$

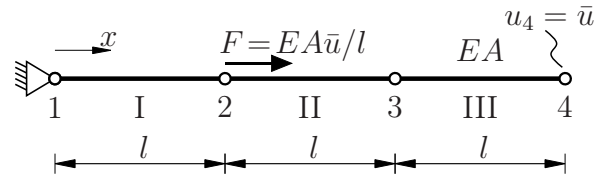
Bestimmen Sie den globalen Vektor der Volumenkräfte \mathbf{f}_{vol} . Beachten Sie die durch die Skizze vorgegebene Konnektivität. (1,0 Punkte)

$\mathbf{f}_{\text{vol}} =$

Aufgabe 2 (Seite 4 von 5)

c)

Es soll nun mittels FEM ein weiteres System aus mehreren (eindimensionalen) Stäben berechnet werden. An Knoten 4 wird die Verschiebung $u_4 = \bar{u}$ aufgeprägt. Das System wird außerdem an Knoten 2 durch eine Einzelkraft $F = EA\bar{u}/l$ belastet.



Die globale Steifigkeitsmatrix des Systems wurde bereits zu

$$\mathbf{K} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

bestimmt.

Bestimmen Sie die Submatrizen \mathbf{K}_{FF} , \mathbf{K}_{FD} , \mathbf{K}_{DF} und \mathbf{K}_{DD} , welche sich auf die freien (F) bzw. die Dirichlet-Freiheitsgrade (D) beziehen. **(1,0 Punkte)**

$\mathbf{K}_{FF} =$	$\mathbf{K}_{FD} =$
$\mathbf{K}_{DF} =$	$\mathbf{K}_{DD} =$

Aufgabe 2 (Seite 5 von 5)

Geben Sie die Verschiebungen \mathbf{u}_D an den Dirichlet-Freiheitsgraden an. **(0,5 Punkte)**

$$\mathbf{u}_D =$$

Geben Sie die externen Kräfte $\mathbf{f}_{\text{sur},F}$ an den Neumann-Freiheitsgraden an. **(0,5 Punkte)**

$$\mathbf{f}_{\text{sur},F} =$$

Bestimmen Sie nun die unbekanntenen Verschiebungen \mathbf{u}_F . **(1,5 Punkte)**

$$\mathbf{u}_F =$$

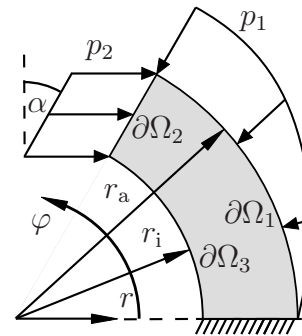
Geben Sie die Gleichung zur Bestimmung der unbekanntenen Reaktionskräfte $\mathbf{f}_{\text{sur},D}$ an. Das Ergebnis muss *nicht* berechnet werden. **(0,5 Punkte)**

$$\mathbf{f}_{\text{sur},D} =$$

Aufgabe 3 (Seite 1 von 3)

a)

Der nebenstehende Bestandteil einer Ringscheibe konstanter Dicke t ist am unteren Rand fest eingespannt. Über den Rand $\partial\Omega_1$ wirkt in radiale Richtung eine über den Winkel aufgetragen linear zunehmende Flächenlast mit Maximalwert p_1 . Auf Rand $\partial\Omega_2$ wirkt horizontal eine konstante Flächenlast p_2 . Der Winkel α beträgt $\frac{1}{6}\pi$. Geben Sie alle Spannungsrandbedingungen der Ränder $\partial\Omega_1$, $\partial\Omega_2$ und $\partial\Omega_3$ an. **(3,0 Punkte)**



$$\partial\Omega_1(r = r_a, \varphi) :$$

$$\partial\Omega_2(r, \varphi = \frac{1}{3}\pi) :$$

$$\partial\Omega_3(r = r_i, \varphi) :$$

Aufgabe 3 (Seite 2 von 3)

Für eine andere Belastung, die lediglich an Rand $\partial\Omega_2$ wirkt ($p_1 = 0, p_2 \neq 0$), stellt sich für das System folgender Spannungszustand im gegebenen polaren Koordinatensystem ein

$$[\boldsymbol{\sigma}]_{r,\varphi} = \begin{bmatrix} (2Ar + \frac{B}{r})e^{\varphi} & 0 \\ 0 & (Ar^2 - \frac{2B}{r})e^{\varphi - \frac{1}{3}\pi} \end{bmatrix}.$$

Die Konstanten A und B sind als bekannt anzunehmen. Geben Sie die Spannungsvektoren für die Ränder $\partial\Omega_2$ und $\partial\Omega_3$ in Polarkoordinaten an. **(2,0 Punkte)**

Bestimmen Sie den Zusammenhang zwischen den beiden Konstanten A und B . **(1,0 Punkte)**

Aufgabe 3 (Seite 3 von 3)

b)

Gegeben sei der folgende ebene Spannungszustand:

$$[\sigma]_{x,y,z} = \sigma_0 \begin{bmatrix} -a^2 e^{-ay} & -c \cos(cx) + d & 0 \\ -c \cos(cx) + d & bx^2 - c^2 y \sin(cx) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Bestimmen Sie **eine** Airysche Spannungsfunktion $F(x, y)$, welche auf den angegebenen Spannungszustand führt. **(3,0 Punkte)**

$$F(x, y) =$$

c)

Für eine Airysche Spannungsfunktion wird der Ansatz $F(x, y) = ax^m + by^n + c$ gewählt. Welchen ganzzahligen, positiven Wert dürfen die Parameter m und n maximal annehmen, damit $F(x, y)$ für positive Koeffizienten a , b und c einen zulässigen Ansatz darstellt? Begründen Sie ihre Antwort. **(1,0 Punkte)**