TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 1 (Seite 1 von 3)

a)
Gegeben sei der folgende Spannungszustand:

$$[\boldsymbol{\sigma}]_{x,y,z} = \sigma_0 \begin{bmatrix} -1 & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} .$$

Bestimmen Sie zunächst die Hauptspannungen. (**1,5 Punkte**)

$$\sigma_1 = -4\sigma_0$$

$$\sigma_2 = 0$$

$$\sigma_3 = 3\sigma_0$$

Bestimmen Sie nun die aus der Vorlesung bekannten Hauptinvarianten J_1, J_2 und J_3. (**1,5 Punkte**)

$$J_1 = -\sigma_0$$

$$J_2 = -12\sigma_0^2$$

$$J_3 = 0$$

Geben Sie den sphärischen Anteil des Spannungstensors an. (**0,5 Punkte**)

$$\left[\boldsymbol{\sigma}^{\text{sph}}\right]_{x,y,z} = -\frac{1}{3}\sigma_0 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 1 (Seite 2 von 3)

Geben Sie den deviatorischen Anteil des Spannungstensors an. (**0,5 Punkte**)

$$\left[\boldsymbol{\sigma}^{\text{dev}}\right]_{x,y,z} = \frac{1}{3}\sigma_0 \begin{bmatrix} -2 & 3\sqrt{3} & 0 \\ 3\sqrt{3} & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

b)

Für einen elastischen Körper (Elastizitätsmodul E, Querkontraktionszahl $\nu = 1/3$) wurde das folgende Verschiebungsfeld ermittelt:

$$[\boldsymbol{u}]_{x,y,z} = \frac{u_0}{l} \begin{bmatrix} 2x + 2y \\ 3y \\ 0 \end{bmatrix} .$$

Bestimmen Sie den dazugehörigen Spannungszustand unter der Annahme linearer isotroper Elastizität. Setzen Sie den Wert $\nu = 1/3$ für die Querkontraktionszahl ein und geben Sie das gekürzte Ergebnis in Abhängigkeit des Elastizitätsmoduls E an. (**3,0 Punkte**)

$$[\boldsymbol{\sigma}]_{x,y,z} = \frac{u_0 E}{4l} \begin{bmatrix} 21 & 3 & 0 \\ 3 & 24 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \end{bmatrix}$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: __________________

Nachname: __________________

Matr.-Nr.: __________________

Aufgabe 1 (Seite 3 von 3)

c)
Für ein anderes System wird nun die folgende Funktion für den Spannungstensor vorgegeben:

$$[\boldsymbol{\sigma}]_{x,y,z} = \begin{bmatrix} 2c_1x^2 + c_2xz & 0 & -\frac{2\sigma_0}{l^2}xz + \frac{\sigma_0}{6l^2}z^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2\sigma_0}{l^2}xz + \frac{\sigma_0}{6l^2}z^2 & 0 & 12c_3z^2 \end{bmatrix} .$$

Für die Volumenkräfte gelte $[\boldsymbol{f}]_{x,y,z} = \mathbf{0}$.

Bestimmen Sie die Konstanten c_1, c_2 und c_3, sodass für alle Werte von x, y und z Gleichgewicht herrscht. **(3,0 Punkte)**

$$c_1 = \frac{1}{2}\frac{\sigma_0}{l^2}$$

$$c_2 = -\frac{1}{3}\frac{\sigma_0}{l^2}$$

$$c_3 = \frac{1}{12}\frac{\sigma_0}{l^2}$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

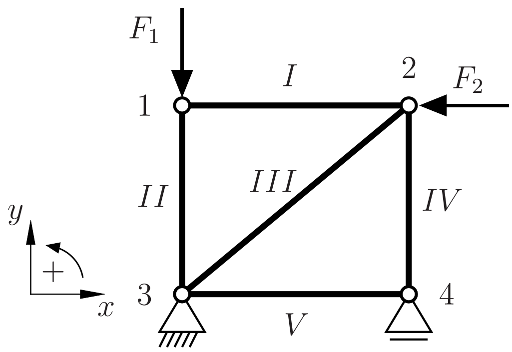
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 2 (Seite 1 von 4)

a)
Das nebenstehende Fachwerk soll mit Hilfe der Finite-Elemente-Methode (FEM) ausgelegt werden. Dazu müssen in einer Eingabedatei verschiedene Eingabegrößen festgelegt werden.
Bestimmen Sie die Konnektivitätsliste der Elemente basierend auf den gegebenen Element- und Knotennummern. (**1,0 Punkte**)



Elementnummer	globale Knotennummer
I	1 2
II	1 3
III	2 3
IV	2 4
V	3 4

Die Liste der globalen Freiheitsgrade sei $\mathbf{u} = [u_x^1, u_y^1, u_x^2, u_y^2, u_x^3, u_y^3, u_x^4, u_y^4]^t$. Bestimmen Sie die Liste `drltDofs`, welche die Freiheitsgradnummern der Dirichlet-Freiheitsgrade beinhaltet. Geben Sie die dazu korrespondierenden Verschiebungen $\mathbf{u}_D$ an. (**1,0 Punkte**)

`drltDoFs` $= [5, 6, 8]$

$\mathbf{u}_D = [0, 0, 0]$

Für die Approximation der Verschiebungen eines Stabelements werden lineare Ansatzfunktionen und als Integrationsverfahren die Gauss-Quadratur gewählt. Wie viele Gausspunkte n_{qp} sollten für die Gauss-Quadratur verwendet werden? Begründen Sie Ihre Antwort kurz. (**0,5 Punkte**)

Für $n_{qp} = 1$ ist die Gauss-Integration bei linearen Ansatzfunktionen in 1D exakt.

TU Dortmund

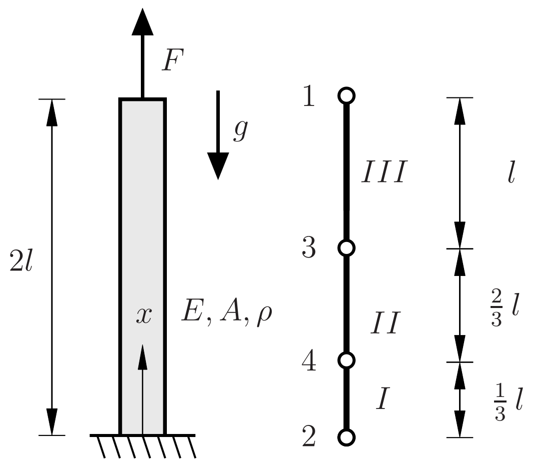
Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

b)
Als nächstes soll ein Stab der Länge $2\,l$ (Elastizitätsmodul E, Querschnittsfläche A) mittels FEM berechnet werden. Dieser wird durch sein Eigengewicht (Dichte ρ, Erdbeschleunigung g) und eine Zugkraft F belastet. Die Diskretisierung erfolgt mit 3 Elementen und den linearen Ansatzfunktionen $N^1(\xi) = \frac{1}{2}\,[1-\xi]$, $N^2(\xi) = \frac{1}{2}\,[1+\xi]$. Für die Gauss-Quadratur soll ein Gausspunkt verwendet werden.



Bestimmen Sie die Jacobi-Matrix (bzw. die Jacobi-Determinante) J^e von Element I. **(1,0 Punkte)**

$J^e = \frac{1}{6}\,l$

Bestimmen Sie als nächstes die Elementsteifigkeitsmatrix $\boldsymbol{K}^e$ von Element I. **(2,0 Punkte)**

$$\boldsymbol{K}^e = 3\frac{E\,A}{l}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$$

Die Elementvektoren der Volumenkräfte der drei Elemente sind bestimmt worden zu

$$\boldsymbol{f}^{e=I}_{vol} = -\frac{1}{6}\,\rho\,g\,A\,l\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{f}^{e=II}_{vol} = -\frac{1}{3}\,\rho\,g\,A\,l\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{f}^{e=III}_{vol} = -\frac{1}{2}\,\rho\,g\,A\,l\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}.$$

Assemblieren Sie diese zum globalen Kraftvektor $\mathbf{f}_{vol}$. **(1,0 Punkte)**

$$\mathbf{f}_{vol} = -\frac{1}{6}\,\rho\,g\,A\,l\begin{bmatrix}3\\1\\5\\3\end{bmatrix}$$

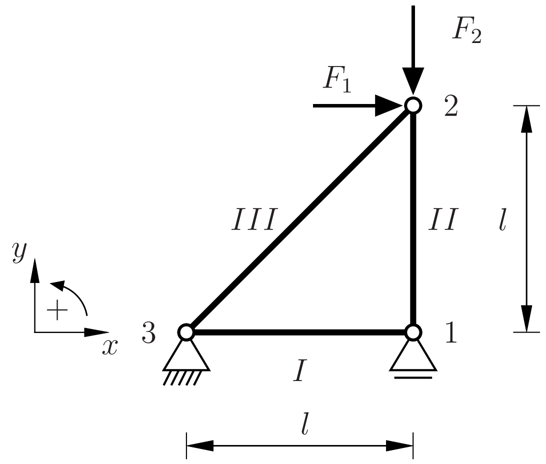
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 2 (Seite 3 von 4)

c)
Für die FEM-Berechnung des nebenstehenden Fachwerks sind die Listen der globalen Freiheitsgrade gegeben als
`drltDofs` $= [2, 5, 6]$
`freeDofs` $= [1, 3, 4]$.
Die globale Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}$ und der globale Kraftvektor $\mathbf{f}_{sur}$ wurden bereits bestimmt



$$\mathbf{K} = \frac{E\,A}{l}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ 0 & -1 & \frac{\sqrt{2}}{4} & 1+\frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ -1 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} & 1+\frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_{sur} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_1 \\ -F_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Warum ist das Gleichungssystem $\mathbf{K} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{f}_{sur}$ nicht direkt nach $\mathbf{u}$ lösbar? (**0,5 Punkte**)

$\mathbf{K}$ ist singulär, eine Invertierung ist nicht möglich.

Extrahieren Sie die Matrizen $\mathbf{K}_{DF}$ und $\mathbf{K}_{DD}$ aus der Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}$, sowie den Vektor $\mathbf{f}_{surF}$ aus dem Kraftvektor $\mathbf{f}_{sur}$. (**2,0 Punkte**)

$$\mathbf{K}_{DF} = \frac{E\,A}{l}\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & -\frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{K}_{DD} = \frac{E\,A}{l}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+\frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{f}_{surF} = \begin{bmatrix} 0 \\ F_1 \\ -F_2 \end{bmatrix},$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 2 (Seite 4 von 4)

Die Verschiebungen der Dirichlet-Freiheitsgrade $\mathbf{u}_D = [0,0,0]^t$ sind bekannt und die unbekannten Verschiebungen an den Neumann-Freiheitsgraden $\mathbf{u}_F$ wurden durch Lösen des Gleichungssystems $\mathbf{K}_{FF} \cdot \mathbf{u}_F = \mathbf{f}_{surF} - \mathbf{K}_{FD} \cdot \mathbf{u}_D$ bestimmt zu

$$\mathbf{u}_F = \frac{l}{E\,A} \begin{bmatrix} 0 \\ [\frac{4}{\sqrt{2}} + 1]F_1 + F_2 \\ -F_1 - F_2 \end{bmatrix}.$$

Bestimmen Sie die noch unbekannten Reaktionskräfte $\mathbf{f}_{surD}$ an den Auflagern. **(1,0 Punkte)**

$$\mathbf{f}_{surD} = \begin{bmatrix} F_1 + F_2 \\ -F_1 \\ -F_1 \end{bmatrix}$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

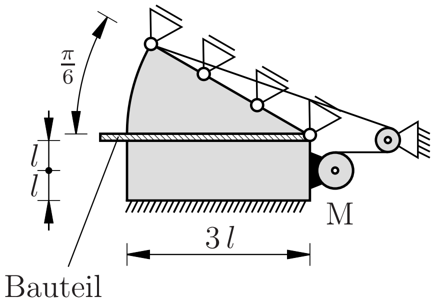
Vorname: ____________________

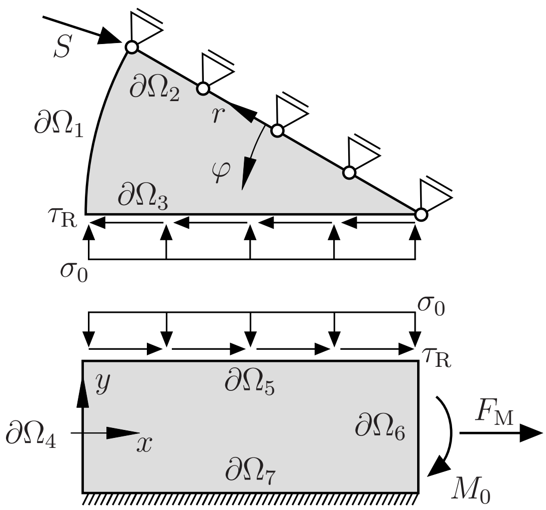
Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 3 (Seite 1 von 3)

a)
Die links abgebildete Vorrichtung zur Fixierung von flachen Bauteilen besteht aus zwei Klemmbacken (Dicke $t = \text{const.}$). Die obere Backe ist an ihrer gesamten Oberkante verschieblich gelagert und wird durch den Motor M über ein Seil angezogen. Im festgespannten Zustand ergeben sich an der Kontaktfläche die rechts abgebildeten (als konstant anzunehmenden) Spannungen σ_0 und τ_R, sowie die Einzelkraft F_M und das Moment M_0.





Bestimmen Sie sämtliche Spannungsrandbedingungen (ggf. auch in integraler Form) am Rand $\partial\Omega_3$ bzgl. des (r, φ)-Polarkoordinatensystems, sowie am Rand $\partial\Omega_6$ bzgl. des kartesischen (x, y)-Koordinatensystems. **(3,5 Punkte)**

Rand $\partial\Omega_3$:

$$\sigma_{r\varphi}\left(r,\ \varphi = \tfrac{\pi}{6}\right) = \tau_\mathrm{R}$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}\left(r,\ \varphi = \tfrac{\pi}{6}\right) = -\sigma_0$$

Rand $\partial\Omega_6$:

$$\sigma_{xy}(x = 3\,l,\ y) = 0$$

$$\int_{-l}^{l} \sigma_{xx}(x = 3\,l,\ y)\, t \,\mathrm{d}y = F_\mathrm{M}$$

$$\int_{-l}^{l} \sigma_{xx}(x = 3\,l,\ y)\, t\, y \,\mathrm{d}y = M_0$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 3 (Seite 2 von 3)

b)

Zur Auslegung sollen die Spannungen in der oberen Klemmbacke mittels einer Airyschen Spannungsfunktion

$$F_1(r,\varphi) = k_0\, r^2\, \varphi + 3\, k_1\, \varphi^3 + \frac{1}{2}\, k_2 \ln(r)$$

berechnet werden. Bestimmen Sie den Koeffizienten σ_{rr} des Spannungstensors $\boldsymbol{\sigma}$ bzgl. des gegebenen (r,φ)-Polarkoordinatensystems.
Hinweis: Die Konstanten k_i sollen nicht bestimmt werden. **(1,5 Punkte)**

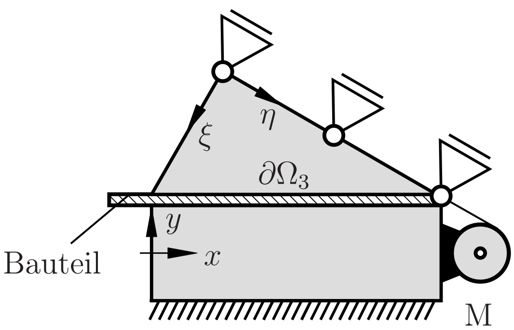
$$\sigma_{rr} = 2\, k_0\, \varphi + 18\, k_1\, \frac{\varphi}{r^2} + \frac{1}{2}\, k_2\, \frac{1}{r^2}$$

Die verbleibenden Komponenten $\sigma_{r\varphi}$, $\sigma_{\varphi\varphi}$ seien ebenfalls bereits aus $F_1(r,\varphi)$ bestimmt worden. Des Weiteren liegen keine volumenhaft verteilten Lasten vor. Erfüllt der so berechnete Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}$ die Gleichgewichtsbedingungen? Begründen Sie Ihre Antwort ohne Rechnung! **(1,0 Punkte)**

Ja, denn die Berechnungsvorschrift der Spannungskomponenten aus einer Airyschen Spannungsfunktion ist per Definition so gewählt, dass $\mathrm{div}(\boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{0}$ erfüllt wird.

c)

Um die Fertigung zu vereinfachen, sieht ein alternativer Entwurf die obere Backe ohne Abrundung vor. Zur Auslegung soll wieder eine Airysche Spannungsfunktion F_2 verwendet werden - diesmal formuliert in kartesischen Koordinaten ξ, η.



TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 3 (Seite 3 von 3)

Die Airysche Spannungsfunktion der oberen Klemmbacke sei durch

$$F_2(\xi,\eta) = c_0\,\xi^5 + c_1\,\eta^4 + c_2\,\xi^3 + c_3\,\eta^2 + c_4\,\xi + c_5$$

angenommen worden. Was muss bzgl. der Konstanten c_i gelten, damit die Kompatibilitätsbedingungen mit diesem Ansatz erfüllt werden? **(1,5 Punkte)**

$c_0 = 0,\ c_1 = 0$

Zum Vergleich der beiden Entwürfe sollen die berechneten Spannungen $\boldsymbol{\sigma}(r,\varphi)$ und $\boldsymbol{\sigma}(\xi,\eta)$ entlang des Randes $\partial\Omega_3$ verglichen werden. Nennen Sie eine Möglichkeit zur Umformung eines oder beider Spannungstensors/-en, mittels derer man die resultierenden Zahlenwerte direkt miteinander vergleichen kann.
Hinweis: Ein entsprechendes Stichwort genügt. **(0,5 Punkte)**

Vergleichsspannungen *oder* Koordinatentransformation
oder Rotation eines Spannungstensors bzgl. des anderen KOS

d)

Für ein anderes System seien bereits aus einer Airyschen Spannungsfunktion $F^*(r,\varphi)$ die Spannungen bzgl. des (r,φ)-Polarkoordinatensystems zu

$$[\boldsymbol{\sigma}] = \begin{bmatrix} 2\,a_1\,\varphi + \dfrac{2}{3}\,a_3\,\dfrac{\varphi}{r^2} & -a_1 + a_2\,\dfrac{1}{r^2} + \dfrac{1}{3}\,a_3\,\dfrac{\varphi^2}{r^2} \\ -a_1 + a_2\,\dfrac{1}{r^2} + \dfrac{1}{3}\,a_3\,\dfrac{\varphi^2}{r^2} & 2\,a_1\,\varphi \end{bmatrix}$$

bestimmt und die Randbedingungen

$$\sigma_{rr}\,(r = r_{\mathrm{A}}, \varphi) = 0, \qquad \sigma_{r\varphi}\left(r, \varphi = \frac{\pi}{4}\right) = -4\,\sigma_0,$$

$$\int_0^{r_{\mathrm{A}}} \sigma_{\varphi\varphi}\,(r, \varphi = \pi)\; t\,\mathrm{d}r = -2\,F_{\mathrm{c}}$$

ermittelt worden. Bestimmen Sie die Konstanten a_1 und a_3 so, dass die Randbedingungen erfüllt werden. **(2,0 Punkte)**

$$a_1 = -\frac{F_c}{\pi\,t\,r_{\mathrm{A}}} \qquad a_3 = 3\,\frac{F_c\,r_{\mathrm{A}}}{\pi\,t}$$