Vorname: ____________________

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau Institut für Mechanik

Prof. Dr.-Ing. A. Menzel

Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 1 (Seite 1 von 3)

In einem Materialpunkt wurde der folgende Spannungszustand

$$[\boldsymbol{\sigma}]_{\boldsymbol{e}_{1,2,3}} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \sigma_0$$

bestimmt. Ferner ist dessen zweite Invariante durch $J_2 = 38\,\sigma_0^2$ gegeben.

a)

Das zu Grunde liegende Material weist eine maximal zulässige Normalspannung von $|\sigma_{\max}| = 7\,\sigma_0$ auf. Geben Sie J_1, J_3 und die Koeffizienten des Spannungstensors bezogen auf das Hauptachsensystem an und prüfen Sie ob die Normalspannung überschritten wird. Die kleinste Hauptspannung wurde bereits zu $\sigma_3 = 2\,\sigma_0$ ermittelt. (**3,5 Punkte**)

$J_1 =$

$J_3 =$

$[\boldsymbol{\sigma}]_{\boldsymbol{n}_{1,2,3}} =$

Geben Sie die Invarianten im Hauptachsensystem an. (**0,5 Punkte**)

$J_1 \quad =$

$J_2 \quad =$

$J_3 \quad =$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau Institut für Mechanik

Prof. Dr.-Ing. A. Menzel

Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ________________

Nachname: ________________

Matr.-Nr.: ________________

Aufgabe 1 (Seite 2 von 3)

b)

Der in a) angegebene Spannungszustand wurde an der Oberfläche eines betrachteten Bauteils ermittelt. Der zugehörige Normalenvektor lautet

$$[\boldsymbol{n}]_{\boldsymbol{e}_{1,2,3}} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix} .$$

Bestimmen Sie den zugehörigen Spannungsvektor $\boldsymbol{t}$ auf der Oberfläche und bestimmen Sie den Winkel α zwischen $\boldsymbol{t}$ und der Oberfläche (nicht zwischen $\boldsymbol{t}$ und $\boldsymbol{n}$!).

(**2,0 Punkte**)

$[\boldsymbol{t}]_{\boldsymbol{e}_{1,2,3}} =$

$\alpha =$

c)

Bestimmen Sie die Dehnungen $\boldsymbol{\varepsilon}$, die in einem Bauteil den folgenden Spannungszustand, unter der Annahme eines linear-elastischen, isotropen Materialverhaltens und ebenen Verzerrungszustands, hervorrufen.

$$[\boldsymbol{\sigma}]_{\boldsymbol{e}_{1,2,3}} = \begin{bmatrix}7 & 1 & 0\\1 & 2 & 0\\0 & 0 & 3\end{bmatrix} \sigma_0$$

Nehmen Sie die Materialparameter E und ν als gegeben an. (**1,5 Punkte**)

$[\boldsymbol{\varepsilon}]_{\boldsymbol{e}_{1,2,3}} =$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau Institut für Mechanik

Prof. Dr.-Ing. A. Menzel

Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Aufgabe 1 (Seite 3 von 3)

Bestimmen Sie die Volumendehnungen ε_v des Bauteils und benennen (nicht berechnen) Sie den Anteil von $\boldsymbol{\sigma}$, der dafür verantwortlich ist. **(1,0 Punkte)**

$\varepsilon_v =$

Anteil von $\boldsymbol{\sigma}$:

d)

Im Folgenden sind die Spannungszustände innerhalb eines Bauteils durch Funktionen der Raumkoordinaten x_1, x_2 gegeben

$$[\boldsymbol{\sigma}]_{\boldsymbol{e}_{1,2,3}} = \begin{bmatrix} 3\,\frac{x_1}{l} + 2\,\frac{x_2^2}{l^2} & -2\,\frac{x_1}{l} + \frac{x_2}{l} & 0 \\ -2\,\frac{x_1}{l} + \frac{x_2}{l} & \frac{x_1^2}{l^2} + 5\,\frac{x_2}{l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sigma_0\,.$$

Geben Sie den Vektor der volumenhaft verteilten Belastung $\boldsymbol{f}$ an, sodass in jedem Materialpunkt (unter Vernachlässigung von Beschleunigungsbeiträgen) Gleichgewicht herrscht. **(1,5 Punkte)**

$[\boldsymbol{f}]_{\boldsymbol{e}_{1,2,3}} =$

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau Institut für Mechanik

Prof. Dr.-Ing. A. Menzel

Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Aufgabe 2 (Seite 1 von 6)

Im Rahmen des Kurses Mechanik IV bzw. Mechanik D wurde ein FEM-Code für 2D-Fachwerksysteme erarbeitet. Alle der hier folgenden Aufgabenteile beziehen sich auf diesen Code.

a)
In einem Python-Programm steht die folgende Zeile:

```
import numpy as np
```

Beschreiben Sie kurz, was diese Programmzeile bewirkt. (**0,5 Punkte**)

b)
In einem Python-Code zur Finite-Elemente-Methode für Fachwerksysteme stehen folgende Programmzeilen:

```
# Dirichlet BCs
drltDoFs = np.array([3, 4, 11, 12])
ud       = np.array([0, 0,  0,  0])
```

Beschreiben Sie in kurzen Sätzen, was diese Programmzeilen bewirken und welche Rückschlüsse sich auf das vorliegende Fachwerkssystem ergeben. (**1,0 Punkte**)

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

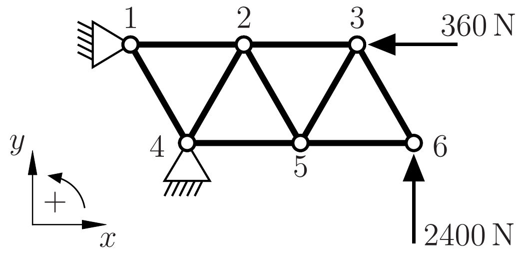
TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau Institut für Mechanik

Prof. Dr.-Ing. A. Menzel

Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Wie müssten die zuvor genannten Zeilen im Programmcode bei der Anwendung der FEM auf das nebenstehende Fachwerksystem lauten? **(1,0 Punkte)**




```
drltDoFs =

ud       =
```

c)
Im selben Python-Code stehen auch die folgenden Programmzeilen:

```
# Neumann BCs
freeDoFs = np.array([    1, 2, 5, 6, 7,    8, 9, 10])
fpre     = np.array([-2500, 0, 0, 0, 0, 5000, 0,  0])
```

Beschreiben Sie in kurzen Sätzen, was diese Programmzeilen bewirken und welche Rückschlüsse sich auf das vorliegende Fachwerksystem ergeben. **(1,0 Punkte)**

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

TU Dortmund

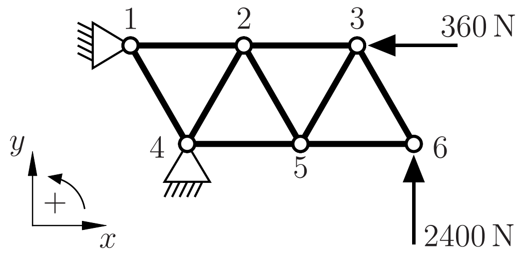
Fakultät Maschinenbau Institut für Mechanik

Prof. Dr.-Ing. A. Menzel

Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Aufgabe 2 (Seite 3 von 6)

Wie müssten die zuvor genannten Zeilen im Programmcode bei der Anwendung der FEM auf das nebenstehende Fachwerksystem lauten? **(1,0 Punkte)**




```
freeDoFs =

fpre     =
```

d)
Im selben Python-Code finden sich des Weiteren folgende Zeilen:

```
#-------------------------------------
# general information
#-------------------------------------

nnp = 17 # number of node points
ndf = 2  # number of degrees of freedom
ndm = 2  # number of dimensions
nel = 32 # number of elements
nen = 2  # number of element nodes
nqp = 1  # number of quadrature points
```

In welcher Zeile wird die Genauigkeit des numerischen Integrationsverfahrens festgelegt? **(0,5 Punkte)**

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau Institut für Mechanik

Prof. Dr.-Ing. A. Menzel

Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Der FE-Code soll zusätzlich um einen Temperaturfreiheitsgrad an jedem Knoten erweitert werden. Was müsste an diesen Zeilen verändert werden? **(0,5 Punkte)**

e)
Der FE-Programmcode weist weiterhin die folgenden Zeilen auf:

```
phi = np.arctan2((xe[3] - xe[1]),(xe[2] - xe[0]))
H = np.array([(np.cos(phi), np.sin(phi), 0, 0),
              (0, 0, np.cos(phi), np.sin(phi))])
```

Erläutern Sie in kurzen Sätzen die jeweilige Bedeutung der Größen `xe`, `phi` und `H`. **(1,5 Punkte)**

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau Institut für Mechanik

Prof. Dr.-Ing. A. Menzel

Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

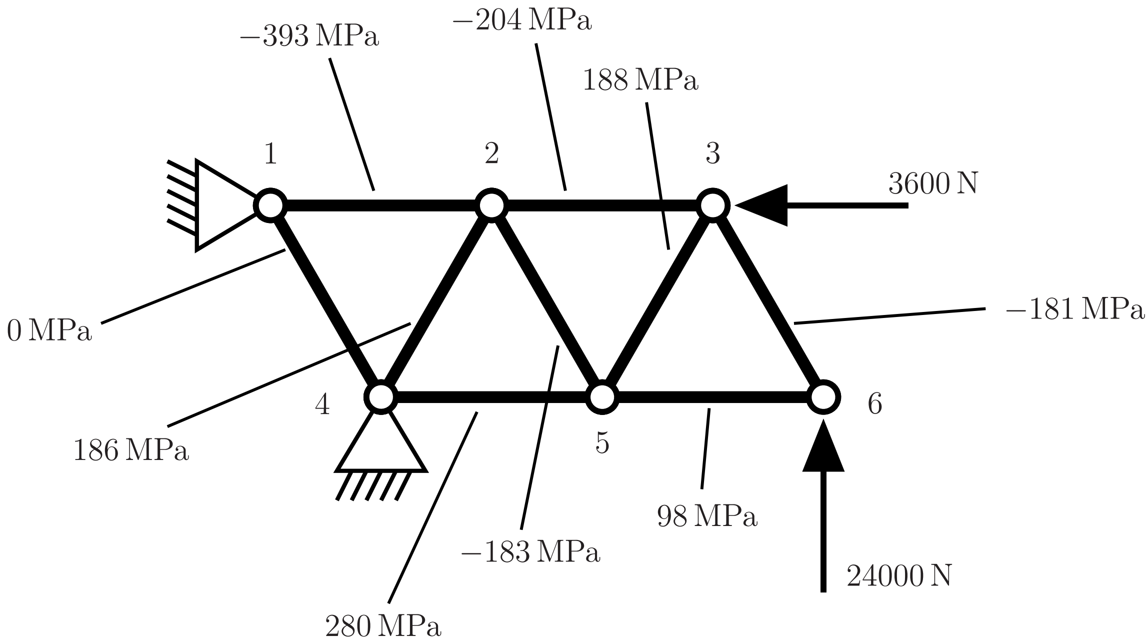
f)
Im weiteren Verlauf findet sich im FE-Code die folgende Zeile:

```
uf = np.linalg.solve(Kff, fpre - np.dot(Kfd, ud))
```

Geben Sie die Gleichung an, zu der diese Programmzeile korreliert und erläutern Sie, was diese Programmzeile bewirkt. **(1,5 Punkte)**

Aufgabe 2 (Seite 6 von 6)

g)
Das folgende Fachwerksystem (Elastizitätsmodul $E = 210\,000\,\mathrm{MPa}$, Querschnittsfläche $A = 150\,\mathrm{mm}^2$) wurde mit Hilfe des FE-Codes berechnet und die Spannungen im jeweiligen Stab im Postprocessing ermittelt. Das zugrundeliegende Material habe eine kritische Zug- und Druckspannung von je 200 MPa.



Nennen Sie eine Möglichkeit mittels derer man die Tragfähigkeit der Stäbe unter Berücksichtigung der kritischen Spannung besser ausnutzen bzw. diese einhalten kann. Die Belastungen, die Lagerung oder die Positionen der Knoten des Fachwerks dürfen dabei nicht verändert werden. **(1,5 Punkte)**

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

TU Dortmund

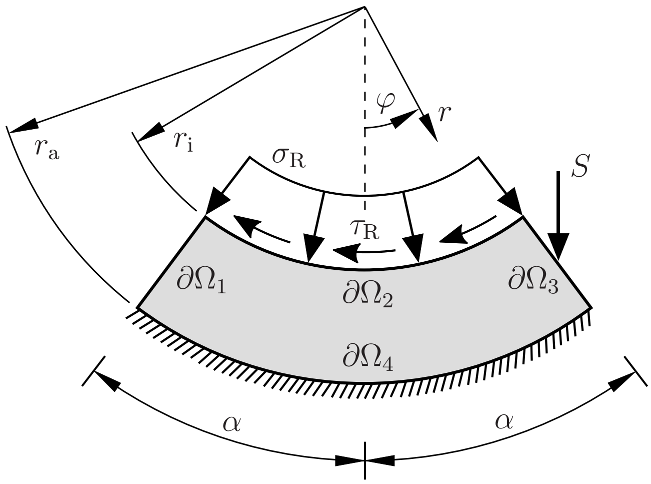
Fakultät Maschinenbau Institut für Mechanik

Prof. Dr.-Ing. A. Menzel

Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Aufgabe 3 (Seite 1 von 3)

Die untere Hälfte einer Rohrschere soll durch das dargestellte System mit der konstanten Dicke t modelliert werden. Das aufliegende Rohr verursacht während des Schneidprozesses eine konstante Flächenlast σ_{R}, sowie durch Reibung aufgrund leichter Rotation eine ebenfalls konstante Flächenlast τ_{R}. Konstruktiv bedingt muss an der rechten Seite außerdem eine senkrecht nach unten wirkende, externe Kraft S aufgenommen werden.



a)
Bestimmen Sie an den Rändern $\partial\Omega_1$, $\partial\Omega_2$ und $\partial\Omega_3$ sämtliche Spannungsrandbedingungen (auch integrale Randbedingungen) bzgl. des gegebenen (r, φ)-Polarkoordinatensystems.

(3,0 Punkte)

Rand $\partial\Omega_1$:

Rand $\partial\Omega_2$:

Rand $\partial\Omega_3$:

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau Institut für Mechanik

Prof. Dr.-Ing. A. Menzel

Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Aufgabe 3 (Seite 2 von 3)

b)
Für die Berechnung der Spannungsverteilung in einem anderen, nicht näher spezifizierten System soll die Airysche Spannungsfunktion

$$F = c_0 + c_1\, r^2\, \ln(r) + c_2\, \varphi + c_3\, r^3\, \cos(\varphi)$$

verwendet werden. Bestimmen Sie den Koeffizienten $\sigma_{r\varphi}$ des Spannungstensors $\boldsymbol{\sigma}$ bzgl. des gegebenen (r, φ)-Polarkoordinatensystem.

Hinweis: Die Konstanten c_i sollen nicht bestimmt werden. (**1,5 Punkte**)

$\sigma_{r\varphi} =$

c)
Für ein anderes System wurde der Spannungstensor $\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}$ aus einer Airyschen Spannungsfunktion bzgl. eines kartesischen (x, y)-Koordinatensystems bereits zu

$$[\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}] = \begin{bmatrix} 2\,k_1\,x & -2\,k_1\,y \\ -2\,k_1\,y & -\dfrac{4\,\pi^2\,k_2}{l^2}\,\cos\left(x\,\dfrac{2\,\pi}{l}\right) \end{bmatrix}$$

berechnet. Des Weiteren gelten die Randbedingungen

$$\widetilde{\sigma}_{yy}\left(x = \frac{l}{2}, y\right) = -p_0 \qquad \text{und} \qquad \int_{-\frac{l}{4}}^{\frac{l}{4}} \widetilde{\sigma}_{xx}\left(x, y = \frac{l}{2}\right)\, x\, t\, \mathrm{d}x = M_0$$

(konstante Dicke t). Bestimmen Sie die Konstanten k_1 und k_2. (**2,0 Punkte**)

$k_1 =$	$k_2 =$

Geben Sie die physikalische Einheit von k_1 an.

Beispiel: Beschleunigung $[a] = \dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$. (**0,5 Punkte**)

$[k_1] =$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau Institut für Mechanik

Prof. Dr.-Ing. A. Menzel

Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 3 (Seite 3 von 3)

d)
Für ein weiteres System seien die Airysche Spannungsfunktion $\widehat{F}(x, y)$, der daraus resultierende Spannungstensor $\widehat{\boldsymbol{\sigma}}$, sowie mittels des Elastizitätsgesetzes der dazugehörige Dehnungstensor $\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}$ bestimmt worden. Welche Bedingung muss $\widehat{F}$ allgemein erfüllen, damit aus $\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}$ eindeutig ein Verschiebungsfeld $\widehat{\boldsymbol{u}}$ bestimmt werden kann? **(1,0 Punkte)**

Prüfen Sie, ob diese Bedingung durch

$$\widehat{F} = \frac{\sigma_0}{l_0^2}\left[\frac{1}{9}\,l_0^2\,x\,y - 4\,x\,y^3\right], \qquad [\widehat{\boldsymbol{\sigma}}] = \begin{bmatrix} -24\,\dfrac{\sigma_0}{l_0^2}\,x\,y & -\dfrac{\sigma_0}{l_0^2}\left[\dfrac{1}{9}\,l_0^2 - 12\,y^2\right] \\ -\dfrac{\sigma_0}{l_0^2}\left[\dfrac{1}{9}\,l_0^2 - 12\,y^2\right] & 0 \end{bmatrix}$$

erfüllt wird. Geben Sie dazu wichtige (Zwischen-)Schritte im Kästchen an und formulieren Sie einen kurzen Antwortsatz. **(2,0 Punkte)**