TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 1 (Seite 1 von 4)

a)
Nennen Sie alle Bedingungen (Bezeichnung und mathematische Beziehung) welche ein Spannungsfeld für ebene Probleme und ohne Volumenlast ganz allgemein erfüllen muss, um physikalisch konsistent zu sein.
Hinweis: Randbedingungen sollen nicht aufgezählt werden. (**1,5 Punkte**)

Potentialgleichung / Kompatibilität

$$\Delta\left(\sigma_{11}+\sigma_{22}\right)=0$$

Gleichgewicht

$$\sigma_{11,1}+\sigma_{12,2}=0$$
$$\sigma_{21,1}+\sigma_{22,2}=0$$

b)
Nennen Sie alle Bedingungen (Bezeichnung und mathematische Beziehung) welche eine Airysche Spannungsfunktion ganz allgemein erfüllen muss um physikalisch konsistent zu sein.

(**0,5 Punkte**)

Bi-Potentialgleichung

$$\Delta\Delta F=0$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

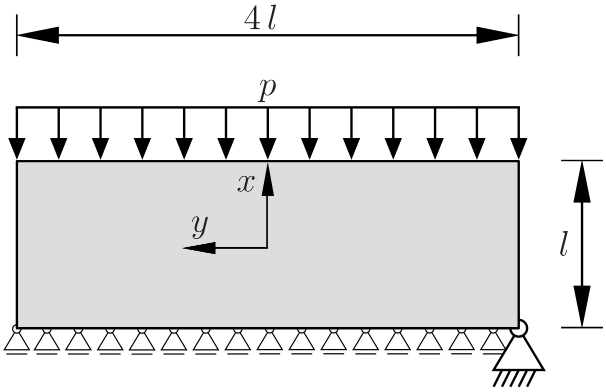
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 1 (Seite 2 von 4)

Gegeben ist eine rechteckige, ebene Scheibe, welche an ihrer oberen Kante durch eine konstante Drucklast p belastet wird. Die *gesamte untere Kante* wird gleichmäßig in $x-$Richtung abgestützt. Lediglich ein Punkt wird zusätzlich gegen Verschiebung in $y-$Richtung gesichert. Das verwendete Koordinatensystem liegt im Schwerpunkt des Körpers.



c)
Welche qualitative Normalspannungsverteilung ist für das hier behandelte Randwertproblem in x-, bzw. in y-Richtung zu erwarten. Begründen Sie ihre Antwort stichwortartig.

(1,0 Punkte)

Körper kann sich frei verformen. Keine Last in y-Richtung

$$\sigma_y(x, y) = 0$$

homogener Druck in x-Richtung

$$\sigma_x(x, y) = \text{const}$$

d)
Für ein anderes, nicht näher spezifiziertes Problem, soll die folgende Airysche Spannungsfunktion angesetzt werden

$$F = a\,x^4 + b\,x^3 + c\,x^2 + d\,x + e\,y^2 + f\,y + g\,.$$

Handelt es sich hierbei um einen zielführenden Ansatz? Begründen Sie ihre Antwort.

(0,5 Punkte)

Nein, da $\Delta\Delta F \neq 0$ (wenn $a \neq 0$)
bzw. nur wenn $a = 0$.

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 1 (Seite 3 von 4)

e)
Bestimmen Sie eine geeignete Airysche Spannungsfunktion F für das in c) vorliegende Randwertproblem und zeigen Sie die Gültigkeit des Ansatzes. Bestimmen Sie alle auftretenden Koeffizienten.

(3,5 Punkte)

Einfachster Ansatz

$$\begin{aligned} F &= a\,y^2 \\ \Rightarrow \quad \Delta\Delta F &= 0 \\ \sigma_x &= 2\,a \\ \sigma_y &= 0 \\ \tau_{xy} &= 0 \end{aligned}$$

Konstante(n) aus RB

$$\begin{aligned} \sigma_x(x = l/2, y) &= -\,p \\ \Rightarrow \quad 2\,a &= -\,p \\ a &= -\,\frac{1}{2}p \end{aligned}$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

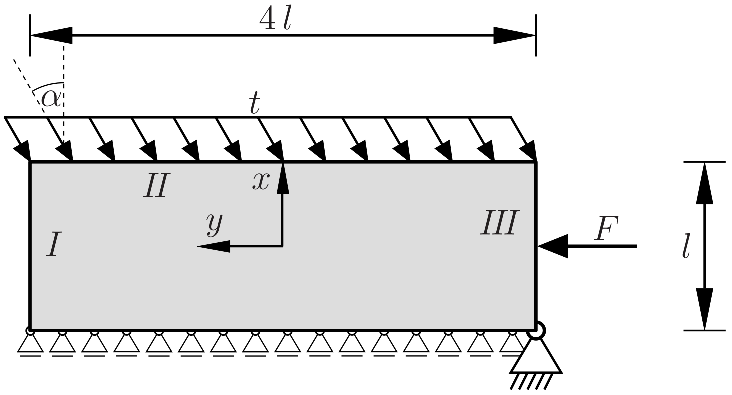
Vorname: ________________

Nachname: ________________

Matr.-Nr.: ________________

Aufgabe 1 (Seite 4 von 4)

Die rechteckige, ebene Scheibe (Dicke d) wird nun durch eine andere Last belastet. Zum einen greift die Linienlast t unter einem als bekannt anzunehmenden Winkel α an und zum anderen wirkt eine als integrale Last zu verstehende Kraft F am rechten Rand. Das zu benutzende Koordinatensystem liegt im Schwerpunkt des Körpers.



f)
Geben Sie sämtliche Spannungs-Randbedingungen des Systems für die Ränder I, II und III an.

(3,0 Punkte)

$$\sigma_y^{I}(x, y = 2l) = 0$$

$$\sigma_{xy}^{I}(x, y = 2l) = 0$$

$$\sigma_x^{II}(x = \frac{l}{2}, y) = -\cos(\alpha)\, t$$

$$\sigma_{xy}^{II}(x = \frac{l}{2}, y) = -\sin(\alpha)\, t$$

$$\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \sigma_y^{III}(x, y = -2l)\,\mathrm{d}x\, d = -F$$

$$\sigma_{xy}^{III}(x, y = -2l) = 0$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

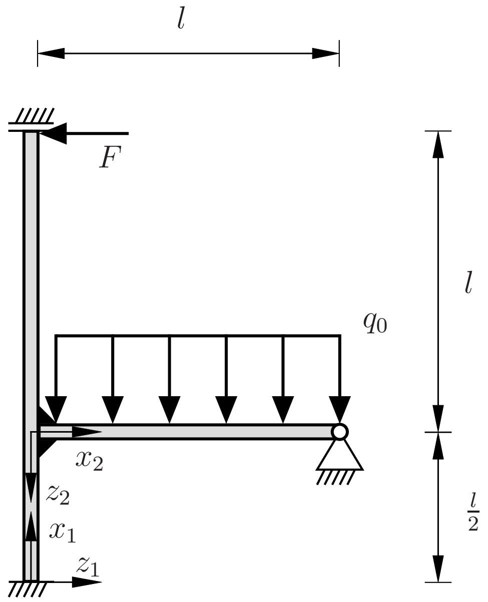
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 2 (Seite 1 von 3)

a)
Das skizzierte Balkensystem (Biegesteifigkeit EI) besteht aus einem vertikalen Balken und einem horizontalen Balken und weist eine biegestarre Verbindungsstelle auf. Die Abmessungen sowie Lagerungen und Belastungen sind der Zeichnung zu entnehmen. Verformungsanteile aus Normal- und Schubbelastung sind zu vernachlässigen.



Die Biegelinienfunktionen werden mit den zugehörigen lokalen Koordinatensystemen in folgende Bereiche eingeteilt:

$$w_I(x_1): \quad 0 \leq x_1 \leq \frac{l}{2} \;,$$

$$w_{II}(x_1): \quad \frac{l}{2} \leq x_1 \leq \frac{3}{2}l \;,$$

$$w_{III}(x_2): \quad 0 \leq x_2 \leq l \;.$$

Geben Sie sämtliche **kinematischen** Rand- und Übergangsbedingungen für das System an. **(3,0 Punkte)**

$$w_I(x_1 = 0) = 0 \qquad w_I'(x_1 = 0) = 0$$

$$w_{II}'(x_1 = \frac{3}{2}l) = 0 \qquad w_{III}(x_2 = l) = 0$$

$$w_I(x_1 = \frac{l}{2}) = 0 \qquad w_{III}(x_2 = 0) = 0$$

$$w_I(x_1 = \frac{l}{2}) = w_{II}(x_1 = \frac{l}{2})$$

$$w_I'(x_1 = \frac{l}{2}) = w_{II}'(x_1 = \frac{l}{2}) = w_{III}'(x_2 = 0)$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

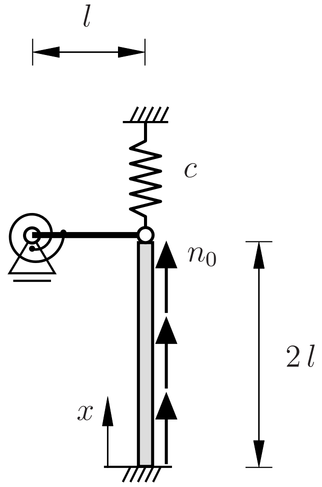
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 2 (Seite 2 von 3)

b)
Das dargestellte masselose System besteht aus einem Dehnstab (Dehnsteifigkeit EA, Länge $2\,l$) und einem starren Stab (Länge l). Das System wird durch eine Feder (Federsteifigkeit c) sowie eine Drehfeder (Drehsteifigkeit c^*) abgestützt, welche für den abgebildeten Zustand ungespannt sind. Des Weiteren wird der Dehnstab durch eine konstante Streckenlast n_0 in Achsenrichtung belastet.



Bestimmen Sie das Gesamtpotential $\Pi(u)$ für das oben dargestellte System in Abhängigkeit der Verschiebungsfunktion $u(x)$ des Dehnstabes.
Hinweis: Integrale sollen nicht gelöst werden und die Verschiebungsfunktion $u(x)$ soll nicht weiter spezifiziert werden. **(2,5 Punkte)**

$$\boxed{\Pi(u) = \int_0^{2\,l} \frac{E\,A}{2}\,(u')^2\;\mathrm{d}x + \frac{c}{2}\,(u(x=2\,l))^2 + \frac{c^*}{2}\left(\frac{u(x=2\,l)}{l}\right)^2 - \int_0^{2\,l} u(x)\,n_0\,\mathrm{d}x}$$

c)
Für ein weiteres System wurde das Potential

$$\tilde{\Pi} = c\int_0^l (\tilde{u}')^2\,\mathrm{d}x - \frac{c}{l^2}\int_0^l \tilde{u}(x)\,x\,\mathrm{d}x - c\,\tilde{u}(x=l)$$

bestimmt. Die Randbedingung $\tilde{u}(x=0)=0$ ist gegeben. Der gewählte Ritz-Ansatz lautet

$$\tilde{u}(x) = a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2.$$

Bestimmen Sie die Koeffizienten a_0, a_1 und a_2 gemäß des Ritz-Verfahrens.
Hinweis: Tragen Sie wichtige Zwischenschritte ebenfalls in das Kästchen auf der nächsten Seite ein. **(4,0 Punkte)**

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

$$a_0 = 0$$

$$\frac{\partial \tilde{\Pi}}{\partial a_1} = 0 \qquad \frac{\partial \tilde{\Pi}}{\partial a_2} = 0$$

$$a_1 = \frac{19}{24} \qquad a_2 = -\frac{1}{8\,l}$$

d)
Begründen Sie, ob ein Ritz-Ansatz der Form $w(x) = b_0 + b_1 \sin(x)$ für die Biegelinie eines verformten Balkens sinnvoll ist, wenn die Randbedingung $w'(x = 0) = 0$ zu erfüllen ist.
(**0,5 Punkte**)

Nein, da mit $b_1 = 0$ der Ansatz zu $w = b_0$ wird.

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

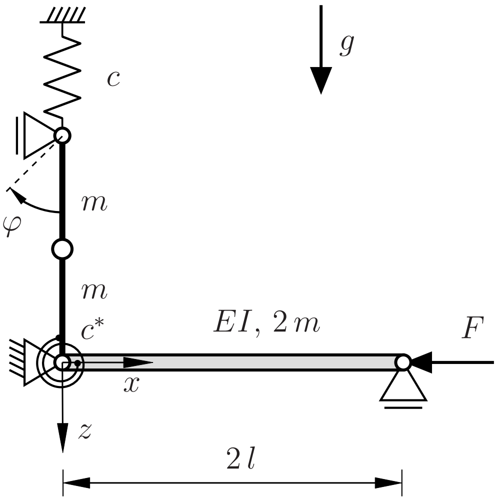
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 3 (Seite 1 von 3)

Das nebenstehend dargestellte System befindet sich im Schwerefeld der Erde mit der Erdbeschleunigung g. Es besteht aus zwei starren Stäben der Masse m und Länge l sowie einem dehnstarren Biegebalken der Masse $2\,m$, Länge $2\,l$ und Biegesteifigkeit EI. Der obere Stab ist oben mit einer Feder der Steifigkeit c gekoppelt, der untere Stab ist am Festlager mit einer Drehfeder der Steifigkeit c^* mit dem Biegebalken verbunden. Beide Federn seien in der vorliegenden Lage ungespannt. Das System wird zusätzlich durch die Kraft F belastet.



a)
Geben Sie ein Gesamtpotential Π des Systems in Abhängigkeit der Koordinate φ sowie der Biegelinie $w(x)$ an. Die Biegelinie soll dabei nicht explizit angegeben und die relevanten Terme nicht zusammengefasst werden. **(3,0 Punkte)**

$$\Pi = \underbrace{\frac{1}{2}\,c\,[2\,l\,\cos(q) - 2\,l]^2}_{\text{Feder}} + \underbrace{\frac{1}{2}\,c^*\,[q + w'(0)]^2}_{\text{Drehfeder}}$$

$$+ \underbrace{\frac{l}{2}\,\cos(q)\,mg + \frac{3}{2}\,l\,\cos(q)\,mg}_{\text{Massenpotential Stäbe}} \; \underbrace{-\frac{2m}{2l}\,g\int_0^{2\,l} w(x)\,\mathrm{d}x}_{\text{Massenpotential Biegebalken}}$$

$$+ \underbrace{\frac{1}{2}\,EI\int_0^{2\,l}[w''(x)]^2\,\mathrm{d}x}_{\text{Formänderungsenergie}} \underbrace{- \underbrace{\underbrace{\underbrace{\frac{1}{2}\int_0^{2\,l} w'(x)^2\,\mathrm{d}x}_{\approx [w'(0)]^2\,l}}_{\text{Verschiebung durch Biegung}} \quad F}_{\text{externe Arbeit}}}_{\text{Potential der externen Arbeit}}$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 3 (Seite 2 von 3)
b)
Für ein weiteres System mit den beiden Freiheitsgraden q_1 und q_2 sei das Potential durch

$$\widetilde{\Pi}(q_1, q_2) = m\,g\,l\,\left[-\frac{3}{2}\cos(q_1) - \frac{1}{2}\sin(q_2)\right]$$

gegeben. Berechnen Sie alle Gleichgewichtslagen des Systems und geben Sie an, welche Gleichgewichtslagen stabil sind. Wesentliche Schritte und Ergebnisse sind in das nachfolgende Kästchen einzutragen. **(3,5 Punkte)**

GGW-Lagen:

$$\frac{\partial \widetilde{\Pi}}{\partial q_1} = \frac{3}{2}\,mgl\,\sin(q_1) \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad q_1 = 0, \pi, 2\pi, \ldots\,(= a\,\pi\ \forall\ a \in \mathbf{Z})$$

$$\frac{\partial \widetilde{\Pi}}{\partial q_2} = -\frac{1}{2}\,mgl\,\cos(q_2) \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad q_2 = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi, \ldots \left(= \left[b - \frac{1}{2}\right]\,\pi\ \forall\ b \in \mathbf{Z}\right)$$

Stabilität mit Energiemethode:

$$\underline{\underline{H}} = \frac{mgl}{2}\begin{bmatrix} 3\,\cos(q_1) & 0 \\ 0 & \sin(q_2) \end{bmatrix}$$

$\rightarrow$ Unterdeterminanten müssen positiv sein:

$$UD_1 = \frac{3}{2}\,mgl\,\cos(q_1) \stackrel{!}{>} 0\,, \quad \text{gilt aus den bestimmten GGW-Lagen für}$$

$$q_1 = 0, 2\pi, 4\pi, \ldots\,(= c\,2\pi\ \forall\ c \in \mathbf{Z})$$

$$UD_1 = \frac{3}{2}\,mgl\,\sin(q_2)\cos(q_1) \stackrel{!}{>} 0\,, \quad \text{mit } q_1 = c\,2\pi \text{ gilt dies für GGW-Lagen}$$

$$q_2 = \frac{\pi}{2}, \frac{5}{2}\pi, \frac{9}{2}\pi, \ldots \left(= \frac{\pi}{2} + d\,2\pi\ \forall\ d \in \mathbf{Z}\right)$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 3 (Seite 3 von 3)
c)
Für ein weiteres System mit den beiden Freiheitsgraden φ und ψ seien folgende Gleichgewichtsgleichungen aufgestellt worden:

$$
\begin{aligned}
G_1 &= 2\,k\,\varphi + 2\,c\,l^2\;[2\,\cos(\varphi)\,\sin(\varphi) + \cos(\varphi)\,\sin(\psi)] = 0\\
G_2 &= F\;l\,\sin(\psi) - 2\,c\,l^2\,\cos(\psi)\,\sin(\varphi) = 0\,.
\end{aligned}
$$

Bestimmen Sie für die Gleichgewichtslage $\varphi = 0$ und $\psi = 0$ die Kraft F_{krit} des Verzweigungspunktes. Geben Sie wesentliche Schritte und Ergebnisse an. **(2,5 Punkte)**

Gleichgewichtsmethode:

$$
\mathrm{Lin}(\underline{G}) = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix}2\,k+4\,c\,l^2 & 2\,c\,l^2\\ -2\,c\,l^2 & F\,l\end{bmatrix}}_{=:\underline{A}} \cdot \begin{bmatrix}\Delta\varphi\\ \Delta\psi\end{bmatrix} \overset{!}{=} \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}
$$

Bedingung für nichttriviale Lösung (GGW-Lage für Perturbation ungleich null):

$$
\begin{aligned}
\det(\underline{A}) &\overset{!}{=} 0 = 2\,F_{\text{krit}}\,l\,k + 4\,F\,c\,l^3 + 4\,c^2\,l^4\\
\Leftrightarrow \qquad F_{\text{krit}} &= -\frac{4\,c^2\,l^4}{2\,l\,k+4\,c\,l^3}
\end{aligned}
$$

Geben Sie, wenn möglich, die Stabilität der Bereiche oberhalb und unterhalb von F_{krit} an. Begründen Sie Ihre Antwort kurz. **(1,0 Punkte)**

Eine Aussage über die Stabilität der Bereich ober- und unterhalb der kritischen Kraft ist nicht möglich, da die Gleichgewichtsbedingungen nicht aus einem Potential hergeleitet wurden. Somit ist das Vorzeichen der Gleichungen beliebig.