TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 1 (Seite 1 von 3)

a)

Für einen ebenen Spannungszustand ist die folgende Airysche Spannungsfunktion in Polarkoordinaten r und φ gegeben.

$$F = C_1\, r^2 + C_2\, r^2\, \cos(2\,\varphi)$$

Berechnen Sie die Spannungen $\sigma_{rr}, \sigma_{r\varphi}, \sigma_{\varphi r}$ und $\sigma_{\varphi\varphi}$ ohne die Konstanten C_1 und C_2 zu spezifizieren. (**2,0 Punkte**)

$\sigma_{rr}(r,\varphi) =$

$\sigma_{r\varphi}(r,\varphi) =$

$\sigma_{\varphi r}(r,\varphi) =$

$\sigma_{\varphi\varphi}(r,\varphi) =$

Die Randbedingungen $\sigma_{\varphi\varphi}(r,\varphi{=}\alpha){=}0$ und $\sigma_{r\varphi}(r,\varphi = \alpha) = \tau_0$ sind gegeben. Bestimmen Sie die Konstanten C_1 und C_2. (**1,0 Punkte**)

$C_1 =$ $\qquad$ $C_2 =$

Prüfen Sie, ob die gegebene Airysche Spannungsfunktion eine sinnvolle Wahl darstellt. (**1,0 Punkte**)

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 1 (Seite 2 von 3)

b)

Erklären Sie kurz in Worten, welche Schritte zur Berechnung des Verschiebungsfeldes durchgeführt werden müssten, das zum Spannungszustand in Aufgabe a) gehört. Nennen sie dabei auch Zwischenschritte.
Hinweis: Das Verschiebungsfeld muss nicht berechnet werden. (**1,0 Punkte**)

c)

Für einen Balken der Dicke $2\,a$, der durch gegebene Kräfte P und N belastet wird, wurde der ebene Spannungszustand

$$\sigma_{xx}(x,y) = -C_1 \frac{P\,x\,y}{a^3} + \frac{N}{2\,a}\,, \qquad \tau_{xy}(x,y) = -\frac{3\,P}{4\,a}\left[1 - \frac{y^2}{a^2}\right]\,, \qquad \sigma_{yy}(x,y) = C_2\,y$$

berechnet. Es greifen keine Volumenkräfte an.

Bestimmen Sie die Konstanten C_1 und C_2 so, dass sich das System im statischen Gleichgewicht befindet.

(**1,0 Punkte**)

$C_1 =$

$C_2 =$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

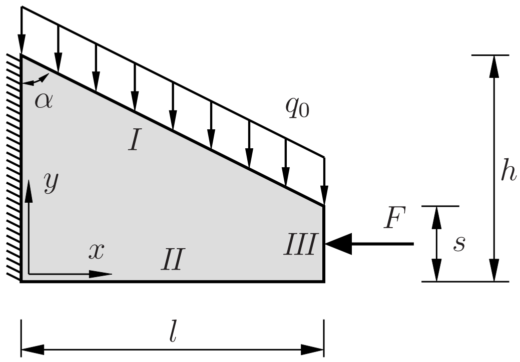
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 1 (Seite 3 von 3)

d)
Die nebenstehend skizzierte Scheibe der Dicke t ist auf der linken Seite eingespannt und wird wie dargestellt durch Traktionen q_0 auf dem Rand I belastet. Die Kraft F auf Rand III ist nur als Gesamtkraft im integralen Sinne bekannt. Es liegt ein ebener Spannungszustand vor.



Geben Sie sämtliche Spannungs-Randbedingungen des Systems für die Ränder I, II und III an. Nennen Sie dazu auch wesentliche und notwendige Zwischenschritte im nachfolgenden Kästchen.

Hinweis: Der Winkel α ist durch die Abmessungen eindeutig bestimmt und kann als bekannt vorausgesetzt werden. (**4,0 Punkte**)

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau

Institut für Mechanik

Prof. Dr.-Ing. A. Menzel

Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

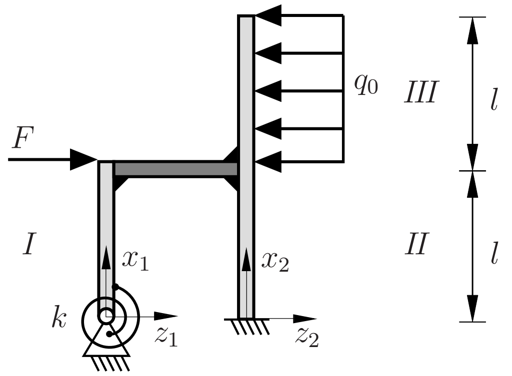
Vorname: ______________________

Nachname: ______________________

Matr.-Nr.: ______________________

Aufgabe 2 (Seite 1 von 3)

Im dargestellten System befindet sich am unteren Ende des linken Balkens (Länge l, Biegesteifigkeit EI_1) eine Drehfeder (Drehfederkonstante k) und am oberen Ende greift eine Kraft F an. Am rechten Balken (Länge $2l$, Biegesteifigkeit EI_2) wirkt in dem Bereich III ($l \leq x_2 \leq 2l$) eine konstante Streckenlast q_0. Der horizontale Balken ist als starr zu betrachten. Verformungsanteile aus Normal- und Schubbelastung sind zu vernachlässigen.



a)
Geben Sie sämtliche kinematischen Rand- und Übergangsbedingungen der Bereiche I und II an. Die Übergangsbedingungen zu Bereich III sind nicht anzugeben.
(2,0 Punkte)

b)
Bestimmen Sie das Potential der inneren Kräfte Π_i sowie das Potential der äußeren Lasten Π_a für das oben dargestellte System.
Hinweis: Integrale sollen nicht gelöst werden und die Biegelinien-Funktionen $w_I(x_1)$, $w_{II}(x_2)$ und $w_{III}(x_2)$ sollen nicht weiter spezifiziert werden. **(2,5 Punkte)**

$\Pi_\mathrm{i} =$

$\Pi_\mathrm{a} =$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 2 (Seite 2 von 3)

c)
Für ein anderes System sind die Bedingungen $w(x = l) = 0$ und $w'(x = l) = w'_0$ gegeben. Die Größe w'_0 ist als bekannt anzusehen. Reduzieren Sie die Anzahl der unbekannten Koeffizienten des Ritz-Ansatzes

$$w(x) = a_0\,[x - l] + a_1\,x^3 + a_2 \sin\left(\frac{\pi}{2\,l}\,x\right)$$

so weit wie möglich. **(1,5 Punkte)**

d)
Für ein weiteres System wurde das Potential

$$\Pi = \frac{1}{2}\,EI \int_l^{2l} [w''(x)]^2\,\mathrm{d}x - 4 \int_0^l \frac{m\,g}{l}\,w(x)\,\mathrm{d}x - 2F\,w'(l)\,l$$

bestimmt. Die Randbedingung $w(x = 0) = 0$ ist gegeben. Der gewählte Ritz-Ansatz lautet

$$w(x) = a_0^2 + a_1\,x^2.$$

Bestimmen Sie die Koeffizienten a_0 und a_1 gemäß des Ritz-Verfahrens.
Hinweis: Tragen Sie wichtige Zwischenschritte ebenfalls in das Kästchen auf der nächsten Seite ein.

(3,0 Punkte)

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 2 (Seite 3 von 3)

Der Term $\frac{m\,g}{l}$ ist als konstante Streckenlast anzusehen. Begründen Sie, ob die Genauigkeit des gewählten Ritz-Ansatz ausreichend ist. **(1,0 Punkte)**

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

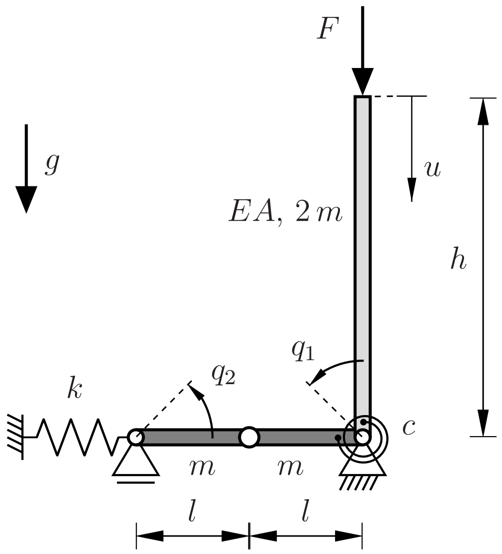
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 3 (Seite 1 von 2)

Das nebenstehend dargestellte System befindet sich im Schwerefeld der Erde (Erdbeschleunigung g). Es besteht aus zwei dehn- und biegestarren Stäben der Masse m (Länge l) sowie einem biegestarren Stab der Masse $2\,m$ (Dehnsteifigkeit EA, Länge h). Die Stäbe sind links mit einer Feder der Steifigkeit k gekoppelt, sowie am rechten Lager mit einer Drehfeder der Steifigkeit c verbunden. Beide Federn seien in der vorliegenden Lage ungespannt. Das System wird zusätzlich durch die richtungstreue Kraft F belastet. Es soll gelten, dass die Verschiebung des Lastangriffspunktes u immer in Stabrichtung zeige und wesentlich kleiner als die Länge h ist, d.h. $u \ll h$.



a)
Geben Sie das äußere Potential $\Pi_\mathrm{a}^\mathrm{I}$ und das innere Potential $\Pi_\mathrm{i}^\mathrm{I}$ des Systems in Abhängigkeit der Winkelkoordinaten q_1 und q_2 sowie der Verschiebung u an. Fassen Sie die Terme nicht weiter zusammen. **(3,5 Punkte)**

$\Pi_\mathrm{a}^\mathrm{I} =$

$\Pi_\mathrm{i}^\mathrm{I} =$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 3 (Seite 2 von 2)

b)
Für ein nicht näher spezifiziertes, ähnliches System sei das Potential durch

$$\Pi^{\mathrm{II}} = [F\,l + m\,g\,l]\sin(q) + \frac{1}{2}\,k\;[l\;\cos(q)]^2$$

gegeben. Bestimmen Sie die kritische Kraft F_{krit}, ab welcher die durch $q = \pi/2$ gegebene Gleichgewichtslage instabil wird. Geben Sie an, welche Bedingung Sie hierfür ausgewertet haben. **(1,5 Punkte)**

$F_{\mathrm{krit}} =$

c)
Für ein weiteres System wurden das innere Potential $\Pi_{\mathrm{i}}^{\mathrm{III}}$ und äußere Potential $\Pi_{\mathrm{a}}^{\mathrm{III}}$ zu

$$\Pi_{\mathrm{i}}^{\mathrm{III}} = \frac{1}{2}\,c\;[q_1 - q_2]^2 + m\,g\,l\,[1 - \cos(q_2)]$$
$$\Pi_{\mathrm{a}}^{\mathrm{III}} = -\frac{1}{2}\,F\,l\;[2\;\cos(q_2) - \cos(q_1) - 1] - M\,q_1$$

bestimmt, wobei hier eine Kraft F sowie ein Moment M wirken. Bestimmen Sie F und M so, dass $(q_1,\, q_2) = (0,\, \pi/2)$ eine Gleichgewichtslage darstellt. **(3,0 Punkte)**

$F =$ $M =$

Untersuchen Sie die obige Gleichgewichtslage auf Stabilität. Geben Sie eine eindeutige Begründung inklusive der von Ihnen ausgewerteten Kriterien an. **(2,0 Punkte)**