TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

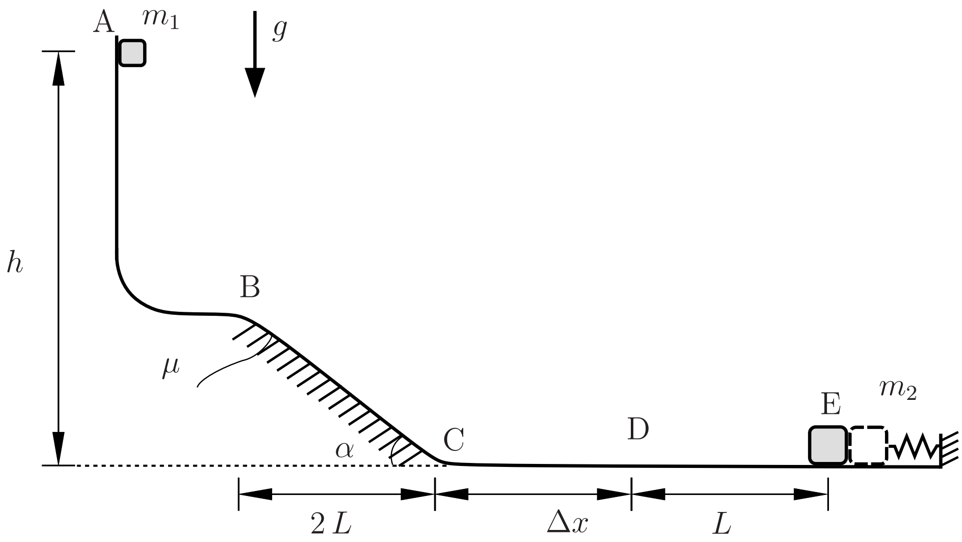
Vorname: ______________________

Nachname: ______________________

Matr.-Nr.: ______________________

Aufgabe 1 (Seite 1 von 4)

Eine Punktmasse $m_1 = m$ wird in Punkt A aus der Ruhelage im Erdschwerefeld g losgelassen. Die Bahn, zu welcher der Körper stets Kontakt hat, ist auf der schiefen Ebene zwischen den Punkten B und C reibungsbehaftet (Gleitreibungskoeffizient μ). Zu einem späteren Zeitpunkt wird eine zweite Punktmasse $m_2 = 2\,m$ durch eine vorgespannte Feder aus der Ruhelage heraus beschleunigt (Federkonstante c, Vorspannung $\Delta\,l$). Im Anschluss gleitet die Masse ohne Reibung.



a)
Bestimmen Sie die Geschwindigkeit v_{B} der Punktmasse m_1 im Punkt B. (**1,0 Punkte**)

$$v_{\mathrm{B}} = \sqrt{2\,g\,(h - 2\,L\,\tan\alpha)}$$

Berechnen Sie die Höhe h, sodass die Punktmasse m_1 genau am Punkt C zum Stehen kommt. (**1,0 Punkte**)

$$h = 2\,\mu\,L$$

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 1 (Seite 2 von 4)

b)

Die Punktmasse m_1 passiere nun Punkt C mit der Geschwindigkeit $v_C = \sqrt{g(2\,h - \frac{1}{4}L)}$. Gleichzeitig verliert die zweite, beschleunigte Punktmasse m_2 im Punkt E den Kontakt zur Feder.

Bestimmen Sie Geschwindigkeit v_E der Punktmasse m_2 im Punkt E. **(1,0 Punkte)**

$$v_\mathrm{E} = \sqrt{\frac{c\,\Delta\,l^2}{2\,m}}$$

Bestimmen Sie den Abstand Δx so, dass sich beide Punktmassen in Punkt D treffen. **(1,0 Punkte)**

$$\Delta x = \frac{L\sqrt{g\,(2\,h - 1/4L)}}{\sqrt{\dfrac{c\,\Delta\,l^2}{2\,m}}}$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

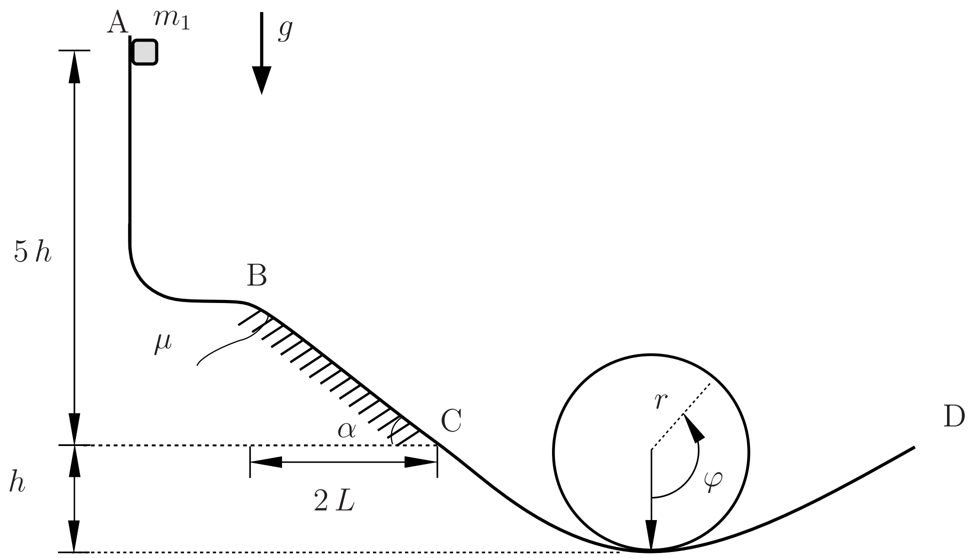
Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 1 (Seite 3 von 4)

c)

In einem anderen Szenario durchläuft die Masse m_1 zwischen den Punkten C und D einen Looping mit dem Radius r.



Bestimmen Sie die Geschwindigkeit $v(\varphi)$ der Masse innerhalb des Loopings. Die Geschwindigkeit v_{C} sei bekannt. **(1,0 Punkte)**

$$v(\varphi) = \sqrt{v_{\mathrm{C}}^2 + 2\,g\,(h - r\,(1 - \cos\varphi))}$$

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

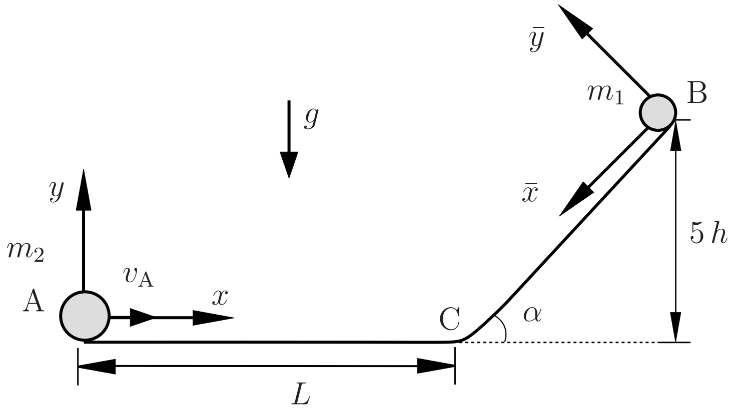
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 1 (Seite 4 von 4)

d)
Eine Punktmasse $m_1 = m$ rollt aus der Ruhe vom Punkt B in Folge der Erdschwere eine schiefe Ebene hinab. Nachdem die Masse m_1 den Punkt C erreicht hat, beginnt eine weitere Punktmasse $m_2 = \frac{3}{2}\,m$ sich mit der konstanten Geschwindigkeit v_A zu bewegen.



Berechnen Sie den Zeitpunkt t^*, zu dem die Punktmasse m_1 den Punkt C erreicht? **(1,0 Punkte)**

$$t^* = \sqrt{\frac{10\,h}{g\,\sin^2\alpha}}$$

Wie lauten die Komponenten der Ortskoordinaten der Punktmasse m_1 in Abhängigkeit der Zeit für $0 < t \leq t^*$? **(1,0 Punkte)**

$$r_{\bar{x}}(t) = g\sin\alpha\,\frac{t^2}{2}$$
$$r_{\bar{y}}(t) = 0$$

Zu welchem Zeitpunkt $\tilde{t}$ stoßen beide Punktmassen zusammen? **(2,0 Punkte)**

$$\tilde{t} = \frac{L}{v_A + \sqrt{10\,g\,h}}$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

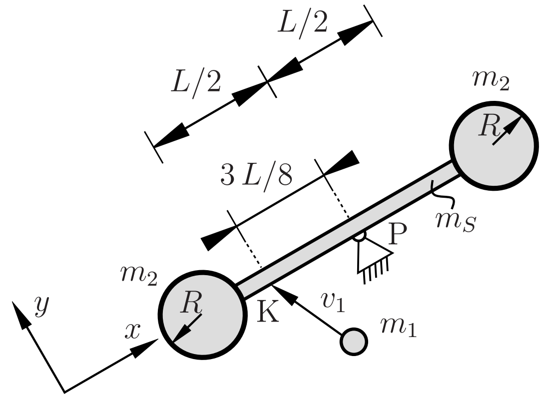
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 2 (Seite 1 von 4)

Der rechts abgebildete Rotor besteht aus einem homogenen Stab der Masse $m_S = 7m$ und der Länge L, sowie aus zwei am Ende angebrachten Kreisscheiben jeweils mit der Masse $m_2 = m$ und dem Radius R. Der Rotor befindet sich vor dem Stoßvorgang in Ruhe.
Im Folgenden stößt eine Punktmasse m_1 mit den Geschwindigkeitskomponenten v_{1x} und v_{1y} im Punkt K auf den Stab (s. Skizze). Der Stoß erfolgt glatt und teilelastisch mit der Stoßzahl e.

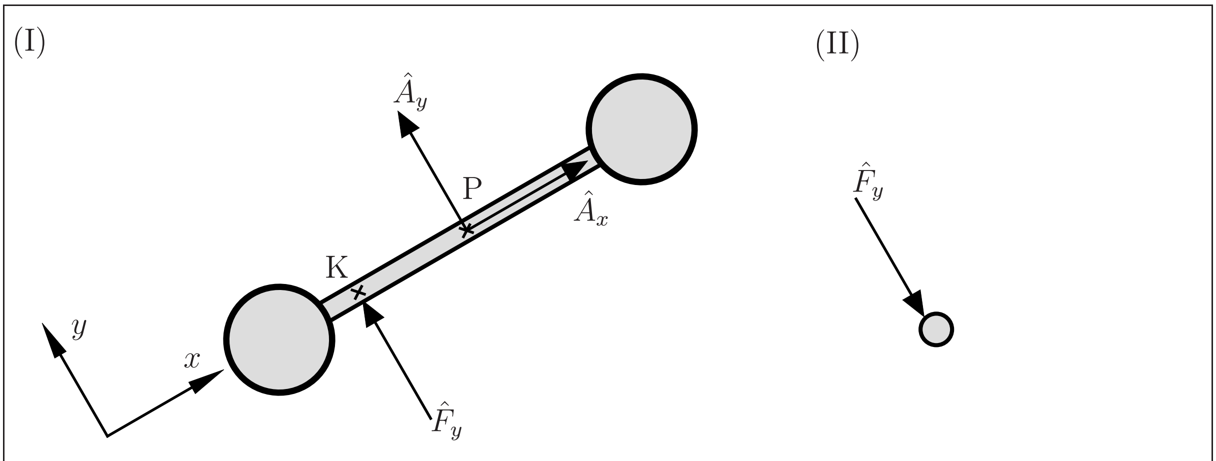


a)
Bestimmen Sie das Massenträgheitsmoment des Rotors bezogen auf den Lagerpunkt P. Fassen Sie die Terme **nicht** weiter zusammen. **(1,5 Punkte)**

$$\Theta_P = \frac{1}{12}\, m_S\, L^2 + 2\,\frac{1}{2}\, m_2\, R^2 + 2\,\left(\frac{L}{2} + R\right)^2 m_2 = \frac{13}{12}\, m\, L^2 + 3\, m\, R^2 + 2\, m\, L\, R$$

Hinweis: Nehmen Sie das Massenträgheitsmoment Θ_P für die folgenden Aufgabenteile als gegeben an.

b)
Vervollständigen Sie das Freikörperbild des Rotors und der Punktmasse indem Sie die entsprechenden Kraftstöße einzeichnen. **(1,0 Punkte)**



TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 2 (Seite 2 von 4)

Es werden die Geschwindigkeiten $\overline{v}_{1x}$, $\overline{v}_{1y}$ der Punktmasse sowie die Winkelgeschwindigkeit des Rotors $\overline{\omega}$ nach dem Stoß gesucht.

Stellen Sie die Gleichungen auf, welche benötigt werden, um die drei unbekannten Größen nach dem Stoß **eindeutig** zu bestimmen. (**2,5 Punkte**)

Hinweis: Die Gleichungen müssen nicht weiter nach den Unbekannten aufgelöst werden. Unbekannten aufgelöst werden.

$$\Theta^P(\bar{\omega} - \omega) = -\frac{3}{8}\,L\,\hat{F}_y$$

$$-\hat{F}_y = m_1(\bar{v}_{1y} - v_{1y})$$

$$e = -\frac{\bar{v}_{2y}^K - \bar{v}_{1y}}{v_{2y}^K - v_{1y}} \quad \text{mit} \quad v_{2y}^K = -\omega\,\frac{3}{8}\,L \quad \text{und} \quad \bar{v}_{2y}^K = -\bar{\omega}\,\frac{3}{8}\,L$$

$$\bar{v}_{1x} = v_{1x}$$

Andere Gleichungssysteme sind auch möglich, solange äquivalent zu dieser Lösung und passend zur Zeichnung

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

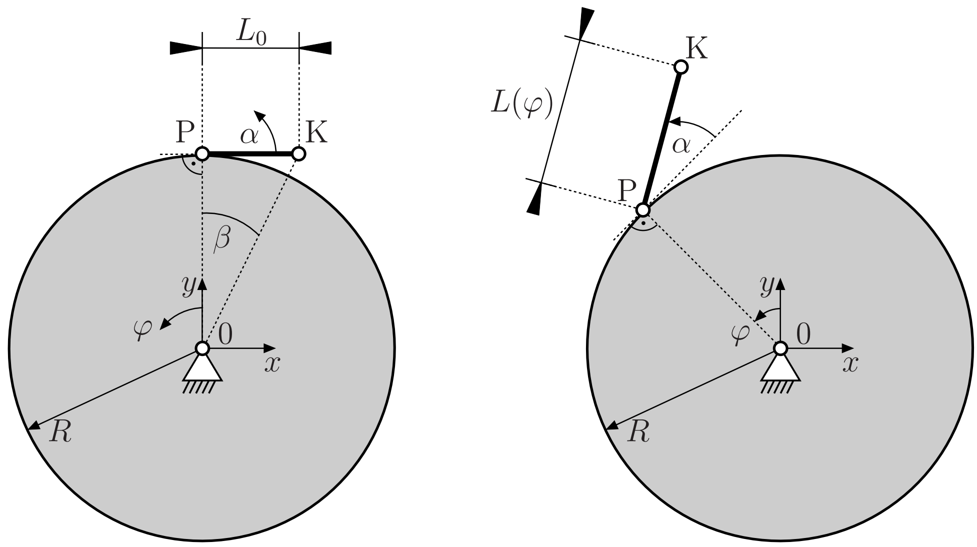
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 2 (Seite 3 von 4)

Eine Karussellfahrt soll durch das unten abgebildete Ersatzmodell (nicht maßstabsgetreu) untersucht werden. Während der Fahrt dreht sich das Karussell mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$. Die Passagierkabine (K) ist über eine lineare Verfahreinheit im Punkt P mit der Drehscheibe des Karussels verbunden. Diese Verfahreinheit ändert während der Fahrt ihre Länge. Abhängig vom Winkel φ ist die Länge $L(\varphi) = L_0(1 + 0.25\sin(\varphi))$. Zusätzlich können die Passagiere die Kabine über Einstellung eines weiteren Winkels $\alpha \in [0, \pi/2]$ um den Punkt P rotieren.



c)
Bestimmen Sie den Winkel β zwischen der y-Achse und der Kabine in Abhängigkeit der Komponenten des Ortsvektors $\boldsymbol{r}_{0\mathrm{K}}$ der Kabine. Nehmen Sie die Komponenten von $\boldsymbol{r}_{0\mathrm{K}}$ für diesen Aufgabenteil als gegeben an. **(1,0 Punkte)**

$$\beta(r_{0\mathrm{K},x}, r_{0\mathrm{K},y}) = \arctan\left(\frac{-r_{0\mathrm{K},x}}{r_{0\mathrm{K},y}}\right) \quad \text{oder} \quad \beta(r_{0\mathrm{K},x}, r_{0\mathrm{K},y}) = \arctan\left(\frac{r_{0\mathrm{K},x}}{r_{0\mathrm{K},y}}\right)$$

Definition des Winkels und Definitionsbereich der arctan-Funktion beachten

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 2 (Seite 4 von 4)

d)
Bestimmen Sie nun die Komponenten des Ortsvektors $\boldsymbol{r}_{0\mathrm{K}}$ der Kabine im x-y-Koordinatensystem in Abhängigkeit von $\varphi(t)$, $\dot{\varphi}(t)$, $\alpha(t)$ und $\dot{\alpha}(t)$. **(2,5 Punkte)**

$$r_{0\mathrm{K},x}(\varphi(t),\dot{\varphi}(t),\alpha(t),\dot{\alpha}(t)) = -\sin(\varphi(t))\,R + \cos(\alpha(t)+\varphi(t))\,L(\varphi(t))$$

$$r_{0\mathrm{K},y}(\varphi(t),\dot{\varphi}(t),\alpha(t),\dot{\alpha}(t)) = cos(\varphi(t))\,R + \sin(\alpha(t)+\varphi(t))\,L(\varphi(t))$$

Bestimmen Sie die Komponenten des Geschwindigkeitsvektors $\boldsymbol{v}_{\mathrm{K}}$ der Kabine im x-y-Koordinatensystem in Abhängigkeit von $\varphi(t)$, $\dot{\varphi}(t)$, $\alpha(t)$ und $\dot{\alpha}(t)$. **(1,5 Punkte)**

$$\begin{aligned} v_{\mathrm{K},x}(\varphi(t),\dot{\varphi}(t),\alpha(t),\dot{\alpha}(t)) = &-\cos(\varphi(t))\,R\,\dot{\varphi}(t) - \sin(\alpha(t)+\varphi(t))\,(\dot{\alpha}(t)+\dot{\varphi}(t))\,L(\varphi(t)) \\ &+ \cos(\alpha(t)+\varphi(t))\,\dot{L}(\varphi(t)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_{\mathrm{K},y}(\varphi(t),\dot{\varphi}(t),\alpha(t),\dot{\alpha}(t)) = &-\sin(\varphi(t))\,R\,\dot{\varphi}(t) + \cos(\alpha(t)+\varphi(t))\,(\dot{\alpha}(t)+\dot{\varphi}(t))\,L(\varphi(t)) \\ &+ \sin(\alpha(t)+\varphi(t))\,\dot{L}(\varphi(t)) \end{aligned}$$

mit $\dot{L}(\varphi(t)) = \dfrac{1}{4}\,L_0\cos(\varphi(t))\,\dot{\varphi}(t)$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

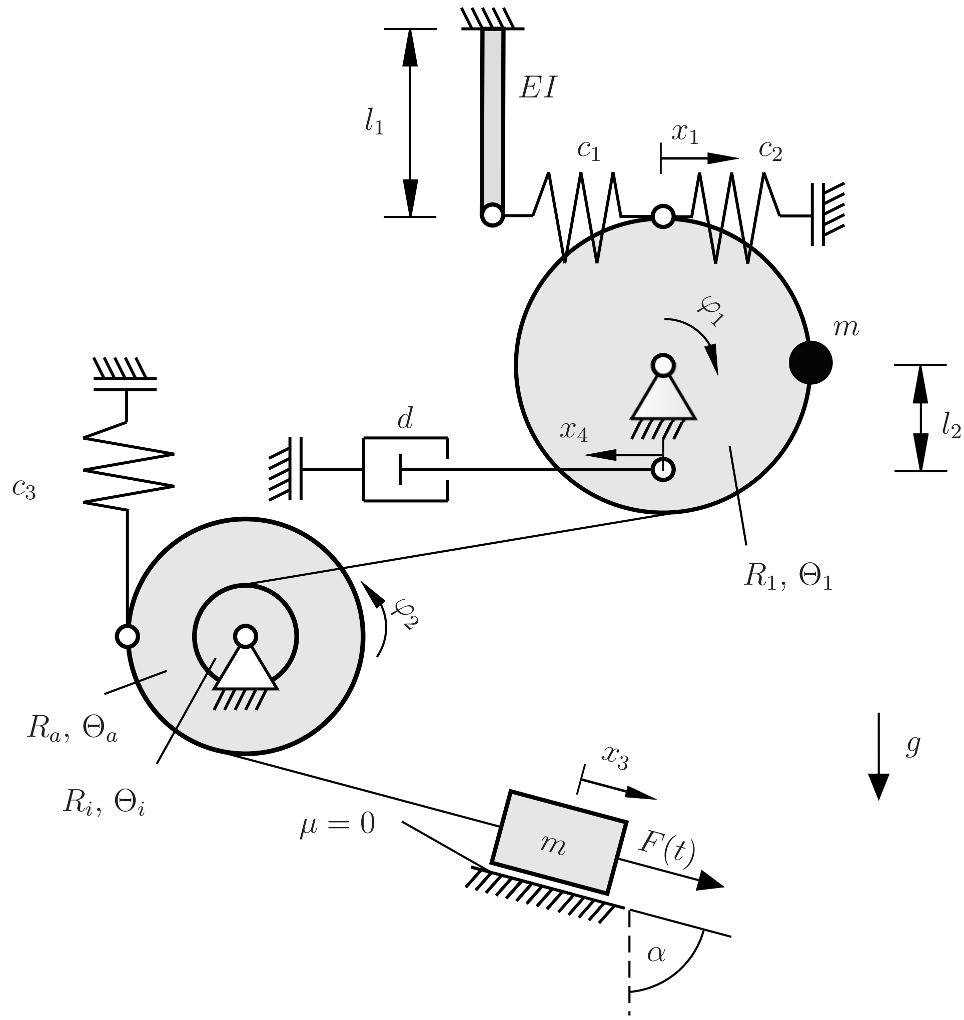
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 3 (Seite 1 von 3)

Das unten dargestellte System besteht aus einer Rolle und einer Stufenrolle (Radien R_1, R_i, R_a; Massenträgheitsmoment bezogen auf den jeweiligen Mittelpunkt der Rollen $\Theta_1, \Theta_i, \Theta_a$). Eine Punktmasse m wird auf dem Rand der oberen Scheibe geführt. Die Blockmasse m wird reibungsfrei auf einer schiefen Ebene geführt und durch die zeitabhängige Kraft $F(t)$ belastet. An der oberen Scheibe ist außerdem ein System bestehend aus zwei Federn (Federsteifigkeiten c_1, c_2), einem Biegebalken (Biegesteifigkeit EI; Länge l_1) und einem Dämpfer (Dämpferkonstante d) exzentrisch angebracht. Der Biegebalken ist als masselos zu betrachten. An der Stufenrolle ist eine Feder (Federsteifigkeit c_3) am äußeren Radius befestigt. Alle Seile sind dehnstarr und stets gespannt. Im dargestellten Zustand ($\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$) sind alle Federn ungespannt und das System wird erst zum Zeitpunkt $t = 0$ aus dieser Lage losgelassen.



TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 3 (Seite 2 von 3)

a)
Bestimmen Sie die Ersatzfedersteifigkeit für den Mechanismus an der oberen Rolle R_1, bestehend aus den Federn c_1, c_2 und dem Biegebalken. **(1,0 Punkte)**

$$\overline{c} = \left[\frac{l_1^3}{3\,EI} + \frac{1}{c_1}\right]^{-1} + c_2$$

Geben Sie die kinematische Bindung $x_3(\varphi_1)$ an. **(1,0 Punkte)**

$$x_3(\varphi_1) = \frac{R_a\,R_1}{R_i}\,\varphi_1$$

b)
Bestimmen Sie die kinetische Energie E_{kin}, die potentielle Energie E_{pot}, sowie die virtuelle Arbeit δW der nichtkonservativen Lasten. Geben Sie die Anteile bzgl. der Koordinaten x_1, x_3. x_4, φ_1, φ_2 und ihrer Geschwindigkeiten oder Variationen an. Fassen Sie die Ergebnisse **nicht** zusammen und setzen Sie das Ergebnis aus dem vorherigen Aufgabenteil für $\overline{c}$ nicht ein. **(3,0 Punkte)**

$$\begin{aligned}
E_{\text{kin}} &= \frac{1}{2}\,[\Theta_i + \Theta_a]\,\dot{\varphi}_2^2 + \frac{1}{2}\,[\Theta_1 + m\,R_1^2]\,\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}\,m\,\dot{x}_3^2 \\
E_{\text{pot}} &= -x_3\cos(\alpha)\,m\,g - R_1\sin(\varphi_1)\,m\,g + \frac{1}{2}\,\overline{c}\,x_1^2 + \frac{1}{2}\,c_3\,(\sin(\varphi_2)\,R_a)^2 \\
\delta W &= F(t)\,\delta x_3 - \dot{x}_4\,d\,\delta x_4
\end{aligned}$$

Geben Sie die nichtkonservativen Kräfte des Dämpfers und der Kraft $F(t)$ bezüglich der Koordinate φ_1 an. Sie können die kinematische Bindung $x_3 = B\,\varphi_1$ nutzen. **(1,0 Punkte)**

$$Q_D = -[d\cos(\varphi_1)\,l_2\,\dot{\varphi}_1]\cos(\varphi_1)\,l_2 \qquad\qquad Q_F = F(t)\,B$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 3 (Seite 3 von 3)

c)
Für ein weiteres, nicht näher spezifiziertes System, seien die kinetische und die potentielle Energie, sowie die nichtkonservativen Kräfte gegeben mit:

$$\begin{aligned}
E_{\text{kin}} &= \frac{3}{2}\, m\, r^2\, \dot{\varphi}^2 \\
E_{\text{pot}} &= \frac{3}{4}\, c\, r^2\, \varphi^2 \\
Q_D &= -6\, d\, r^2\, \dot{\varphi} \\
Q_F &= F_0\, r\, \sin(\Omega\, t)
\end{aligned}$$

Bestimmen Sie für das gegebene System die Bewegungsdifferentialgleichung. **(2,0 Punkte)**

$$\ddot{\varphi} + 2\,\frac{d}{m}\,\dot{\varphi} + \frac{1}{2}\,\frac{c}{m}\,\varphi = \frac{F_0}{3\,m\,r}\sin(\Omega\, t)$$

Bestimmen Sie den Abklingkoeffizienten δ und die Eigenkreisfrequenz ω_0. **(0,5 Punkte)**

$$\delta = \frac{d}{m} \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{c}{2\,m}}$$

Gehen Sie im Folgenden von dem ungedämpften System aus (Dämpferkonstante $d = 0$). Bestimmen Sie die partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung $\varphi_{\text{part}}(t)$. Geben Sie zusätzlich die Masse m^* an, für die der Resonanzfall auftritt, in Abhängigkeit von der Erregerfrequenz Ω. **(1,5 Punkte)**

$$\varphi_{\text{part}}(t) = \frac{F_0}{3\,m\,r\,[c/(2\,m) - \Omega^2]}\,\sin(\Omega\, t)$$

$$m^*(\Omega) = \frac{c}{2\,\Omega^2}$$