TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

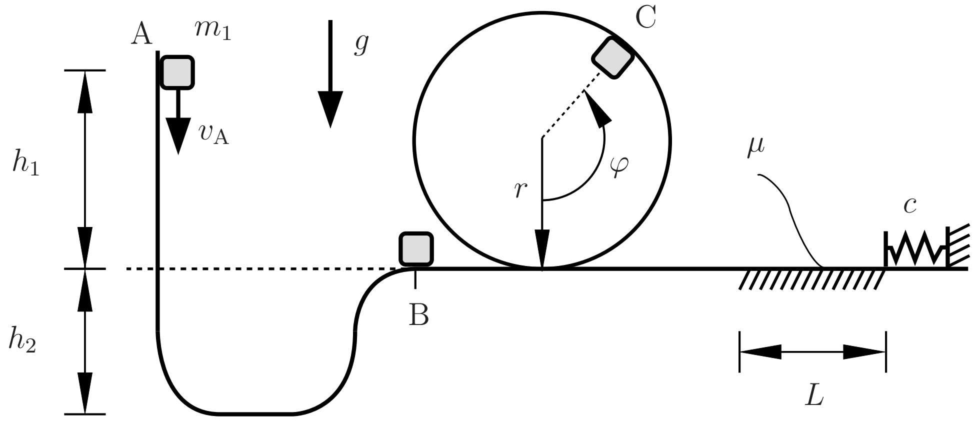
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 1 (Seite 1 von 3)

Eine Punktmasse m_1 bewegt sich wie abgebildet im Punkt A mit der Startgeschwindigkeit v_A im Erdschwerefeld g. Die Masse gleitet zunächst reibungsfrei bis zum Punkt B, ohne den Kontakt zur Bahn zu verlieren. Anschließend durchläuft die Punktmasse einen Looping mit dem Radius r. Darauf folgend gleitet die Masse über eine reibungsbehaftete Fläche (Gleitreibungskoeffizient μ) der Länge L, an deren Ende sich eine ungespannte Feder befindet.



a)
Bestimmen Sie die Geschwindigkeit v_B der Punktmasse im Punkt B. (**0,5 Punkte**)

$$v_B = \sqrt{2gh_1 + v_A^2}$$

b)
Bestimmen Sie die Geschwindigkeit $v_\mathrm{C}(\varphi)$ der Masse innerhalb des Loopings. Nehmen Sie an, dass die Geschwindigkeit v_B bekannt sei. (**1,0 Punkte**)

$$v_\mathrm{C}(\varphi) = \sqrt{v_B^2 - 2gr\,(1 - \cos(\phi))}$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 1 (Seite 2 von 3)

Wie groß muss $v_{\mathrm{B}}(\varphi)$ mindestens sein, damit die Punktmasse im Punkt C nicht die Bahn verlässt? **(2,0 Punkte)**

$$v_{\mathrm{B}}(\varphi) \geq \sqrt{gr(2 - 3\cos(\varphi))}$$

Wie groß muss v_{B} mindestens sein, damit die Punktmasse innerhalb des Loopings zu **keinem** Zeitpunkt den Kontakt zur Bahn verliert? **(0,5 Punkte)**

$$v_{\mathrm{B}} \geq \sqrt{5gR}$$

c)
Wie weit wird die Feder für den Fall $v_{\mathrm{B}} = \sqrt{\mu g L}$ gestaucht? **(1,0 Punkte)**

$$\Delta x = 0$$

Wie weit wird die Feder, abhängig von einem beliebigem v_{B}, am Ende der Bahn durch die Punktmasse gestaucht? **(1,0 Punkte)**

$$\Delta x = \begin{cases} 0 & \text{falls } v_B^2 \leq 2\mu g L \\ \sqrt{\frac{m}{r}\left(v_B^2 - 2\mu g L\right)} & \text{falls } v_B^2 > 2\mu g L \end{cases}$$

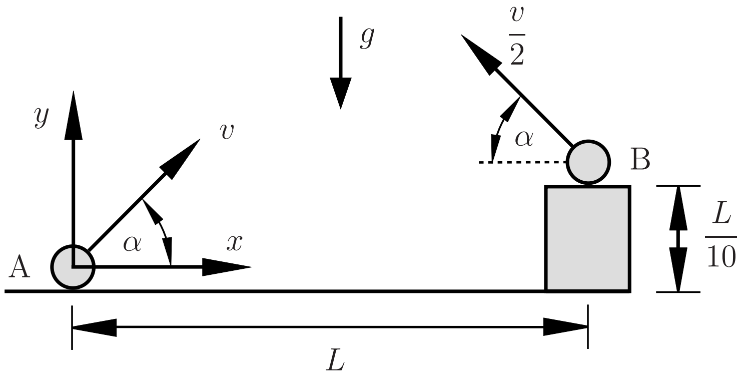
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 1 (Seite 3 von 3)

Zwei gleich schwere, gegenüberliegende Punktmassen A und B starten unter dem Winkel α im Schwerefeld g der Erde. Der Betrag der Anfangsgeschwindigkeit von Punktmasse B sei halb so groß wie der von Punktmasse A.



d)
Wie lauten die Komponenten der Ortskoordinaten der Punktmassen in Abhängigkeit der Zeit? **(2,0 Punkte)**

$$r_{\mathrm{A},x}(t) = v_A \cos(\alpha) t$$

$$r_{\mathrm{A},y}(t) = v_A \sin(\alpha) t - \tfrac{1}{2} g t^2$$

$$r_{\mathrm{B},x}(t) = L - \tfrac{1}{2} v_A \cos(\alpha) t$$

$$r_{\mathrm{B},y}(t) = \tfrac{L}{10} + \tfrac{1}{2}\, v_A \sin(\alpha) t - \tfrac{1}{2} g t^2$$

Zu welchem Zeitpunkt t^* befinden sich die beiden Punktmassen exakt übereinander? **(1,0 Punkte)**

$$t^* = \frac{2L}{3 v_A \cos(\alpha)}$$

Wie groß muss α sein, damit sich die beiden Punktmassen in der Luft treffen? Nennen Sie den Ansatz dafür und den Winkel α! **(1,0 Punkte)**

Ansatz: $r_{\mathrm{A},y}(t^*) = r_{\mathrm{B},y}(t^*)$

$\alpha = \arctan\left(\frac{3}{10}\right)$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

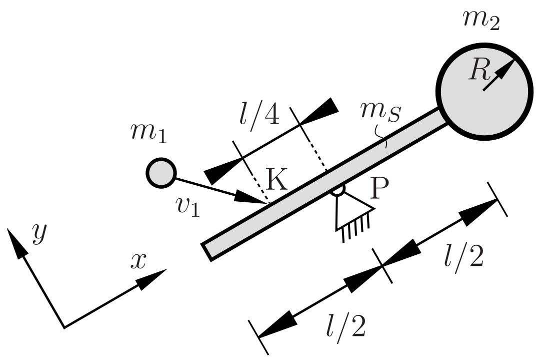
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 2 (Seite 1 von 4)

Der rechts abgebildete Rotor besteht aus einem homogenen Stab der Masse $m_S = 9m$ und der Länge l, sowie einer am Ende angebrachten Kreisscheibe mit der Masse $m_2 = m$ und dem Radius R. Der Rotor befindet sich vor dem Stoßvorgang in Ruhe. Im Folgenden stößt eine Punktmasse m_1 mit den Geschwindigkeitskomponenten v_{1x} und v_{1y} im Punkt K auf den Stab wie skizziert. Der Stoß erfolgt glatt und teilelastisch mit der Stoßzahl e.

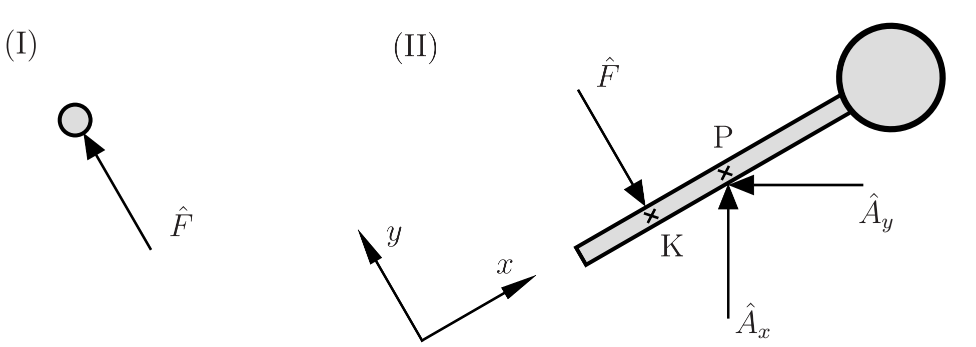


a)
Bestimmen Sie das Massenträgheitsmoment des Rotors bezogen auf den Lagerpunkt P. Fassen Sie die Terme **nicht** weiter zusammen. (**1,5 Punkte**)

$$\Theta_P = ml^2 + \frac{3}{2}mR^2 + mlR$$

Hinweis: Nehmen Sie das Massenträgheitsmoment Θ_P für die folgenden Aufgabenteile als gegeben an.

b)
Vervollständigen Sie das Freikörperbild des Rotors und der Punktmasse indem Sie die entsprechenden Kraftstöße einzeichnen. (**1,0 Punkte**)



TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 2 (Seite 2 von 4)

Es werden die Geschwindigkeiten $\overline{v}_{1x}$, $\overline{v}_{1y}$ der Punktmasse sowie die Winkelgeschwindigkeit des Rotors $\overline{\omega}$ nach dem Stoß gesucht.

Stellen Sie die Gleichungen auf, welche benötigt werden um die drei unbekannten Größen nach dem Stoß **vollständig** zu bestimmen. (**2,5 Punkte**)

Hinweis: Die Gleichungen müssen nicht weiter nach den Unbekannten aufgelöst werden.

$$\Theta^P(\bar{\omega} - \omega) = -\frac{l}{4}\hat{F}$$

$$-\hat{F} = m_1(\bar{v}_{1y} - v_{1y})$$

$$e = \frac{\bar{\omega}\frac{l}{2} - \bar{v}_{1y}}{v_{1y}}$$

$$\bar{v}_{1x} = v_{1x}$$

Andere Gleichungssysteme sind auch möglich, solange äquivalent zu dieser Lösung!

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

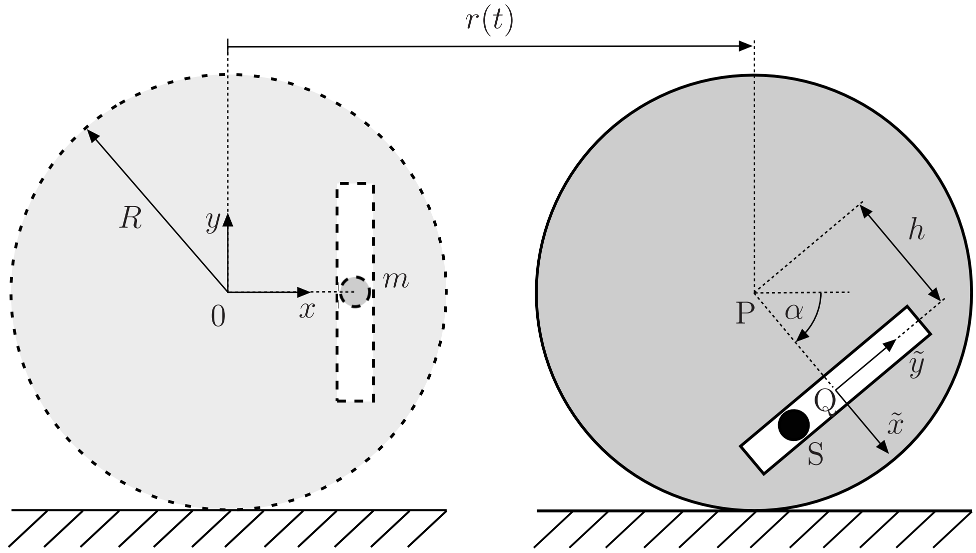
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 2 (Seite 3 von 4)

Es wird das im Folgendem abgebildete System betrachtet, welches zum Zeitpunkt t_0 (links) und zum Zeitpunkt t (rechts) gezeigt wird. Die masselose Kreisscheibe mit dem Radius R rollt schlupffrei auf dem Untergrund ab. Die Verschiebung des Mittelpunktes der Kreisscheibe ist durch die Funktion $r_{0\mathrm{P},x} = r(t)$ im globalen x-y-Koordinatensystem gegeben. In die Scheibe wurde eine Nut im Abstand h exzentrisch eingelassen, in welcher sich im Punkt S eine Punktmasse befindet. Die Bewegung der Punktmasse in der Nut wird durch die Funktion $\tilde{y}_\mathrm{S} = \overline{\mathrm{QS}} = -\sin(3r(t)/R)$ beschrieben.



c)
Bestimmen Sie den Winkel α in Abhängigkeit von $r(t)$. **(1,0 Punkte)**

$$\alpha(t) = \frac{a(t)}{R}$$

Hinweis: Nehmen Sie im Folgendem den Winkel $\alpha(t)$ als gegeben an.

d)
Bestimmen Sie die Komponenten des Ortsvektors $\boldsymbol{r}_{0\mathrm{S}}$ der Punktmasse im globalen x-y-Koordinatensystem in Abhängigkeit von t. **(1,0 Punkte)**

$$r_{0\mathrm{S},x}(t) = r(t) + h\cos(\alpha) + \tilde{y}_\mathrm{S}\sin(\alpha)$$
$$r_{0\mathrm{S},y}(t) = -h\sin(\alpha) + \tilde{y}_\mathrm{S}\cos(\alpha)$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Bestimmen Sie die Komponenten des Geschwindigkeitsvektors $\boldsymbol{v}_\mathrm{S}$ der Punktmasse im globalen x-y-Koordinatensystem in Abhängigkeit von t. **(2,0 Punkte)**

$$v_{\mathrm{S},x}(t) = \dot{r}(t) - \dot{\alpha} h \sin(\alpha) + \dot{\tilde{y}}_\mathrm{S} \sin(\alpha) + \tilde{y}_\mathrm{S} \dot{\alpha} \cos(\alpha)$$
$$v_{\mathrm{S},y}(t) = -\dot{\alpha} h \cos(\alpha) + \dot{\tilde{y}}_\mathrm{S} \cos(\alpha) - \tilde{y}_\mathrm{S} \dot{\alpha} \sin(\alpha)$$

e)
Bestimmen Sie die Komponenten der Relativgeschwindigkeit $\boldsymbol{v}_\mathrm{S}^{rel}$ der Punktmasse im $\tilde{x}$-$\tilde{y}$-Koordinatensystem. **(1,0 Punkte)**

$$v_{\mathrm{S},\tilde{x}}^{rel}(t) = 0$$
$$v_{\mathrm{S},\tilde{y}}^{rel}(t) = \dot{\tilde{y}}$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

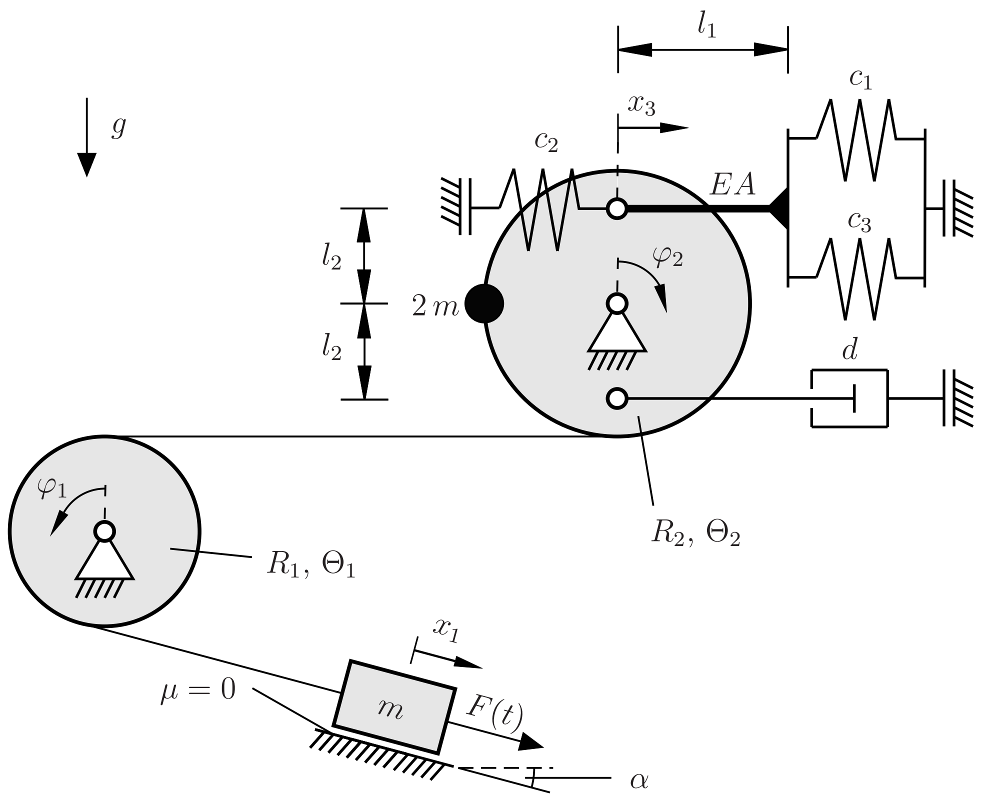
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 3 (Seite 1 von 3)

a)
Das unten dargestellte System besteht aus zwei Rollen (Radien R_1, R_2; Massenträgheitsmoment bezogen auf den jeweiligen Mittelpunkt der Rollen Θ_1, Θ_2). Eine Punktmasse $2\,m$ wird auf dem Rand der zweiten Scheibe geführt. Die Blockmasse m wird reibungsfrei auf einer schiefen Ebene geführt und durch die zeitabhängige Kraft $F(t)$ belastet. An der zweiten Scheibe ist ein System bestehend aus drei Federn (Federsteifigkeiten c_1, c_2, c_3), einem Dehnstab (Dehnsteifigkeit $E\,A$; Länge l_1) und einem Dämpfer (Dämpferkonstante d) exzentrisch angebracht. Der Dehnstab ist als masselos zu betrachten. Alle Seile sind dehnstarr und stets gespannt. Im dargestellten Zustand befindet sich das System in Ruhe und alle Federn sind ungespannt.



Bestimmen Sie die Ersatzfedersteifigkeit für den Mechanismus an der rechten Rolle R_2, bestehend aus den Federn c_1, c_2, c_3 und dem Dehnstab. **(1,5 Punkte)**

$\overline{c} = c_2 + \frac{[c_1+c_3]\,EA}{[c_1+c_3]\,l_1+EA}$
Es werden auch nicht zusammengefasste Lösungen akzeptiert.

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 3 (Seite 2 von 3)

Geben Sie die kinematische Bindung $x_1(\varphi_2)$ an. **(1,0 Punkte)**

$$x_1(\varphi_2) = \varphi_2\, R_2$$

b)
Bestimmen Sie die kinetische Energie E_{kin}, die potentielle Energie E_{pot}, sowie die virtuelle Arbeit δW der nichtkonservativen Lasten. Geben Sie die Anteile bzgl. der Koordinaten x_1, x_3, φ_1, φ_3 und ihrer Geschwindigkeiten an. Fassen Sie die Ergebnisse **nicht** zusammen.

Hinweis: Rechnen Sie für den Mechanismus an der rechten Rolle mit der nicht näher spezifizierten Ersatzsteifigkeit $\overline{c}$ weiter und setzen Sie das Ergebnis aus dem vorherigen Aufgabenteil nicht ein. **(3,0 Punkte)**

$$E_{\text{kin}} = \tfrac{1}{2}\, m\, \dot{x}_1^2 + \tfrac{1}{2}\, 2\, m\, (R\, \dot{\varphi}_2)^2 + \tfrac{1}{2}\, \Theta_1\, \dot{\varphi}_1^2 + \tfrac{1}{2}\, \Theta_2\, \dot{\varphi}_2^2$$

$$E_{\text{pot}} = \tfrac{1}{2}\, \overline{c}\, x_3^2 - m\, g\, \sin(\alpha)\, x_1 + 2\, m\, g\, \sin(\varphi_2)\, R_2$$

$$\delta W = F(t)\, \delta x_1 - d\, \dot{x}_3\, \delta x_3$$

Vorname: ________________

Nachname: ________________

Matr.-Nr.: ________________

Aufgabe 3 (Seite 3 von 3)

c)
Für ein weiteres, nicht näher spezifiziertes System, seien die kinetische und die potentielle Energie, sowie die nichtkonservativen Kräfte gegeben mit:

$$\begin{aligned} E_{\text{kin}} &= \frac{17}{4}\, m\, r^2\, \dot{\varphi}^2 \\ E_{\text{pot}} &= 2\, c\, r^2\, \varphi^2 \\ Q_D &= -4\, d\, r^2\, \dot{\varphi} \\ Q_F &= F_0\, r\, \cos(\Omega\, t) \end{aligned}$$

Bestimmen Sie für das gegebene System die Bewegungsdifferentialgleichung. **(2,0 Punkte)**

$\frac{17}{2}\, m\, r^2\, \ddot{\varphi} + 4\, d\, r^2\, \dot{\varphi} + 4\, c\, r^2\, \varphi = F_0\, r \cos(\Omega\, t)$
Normalisierte Formen sind ebenfalls korrekt.

Bestimmen Sie den Abklingkoeffizienten δ und die Eigenkreisfrequenz ω_0. **(1,0 Punkte)**

$$\delta = \frac{4\, d}{17\, m}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{8\, c}{17\, m}}$$

Gehen Sie im Folgenden von dem ungedämpften System aus ($d = 0$). Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung $\varphi_{\text{part}}(t)$. Geben Sie zusätzlich eine Federsteifigkeit $\overline{c}$ an, für die der Resonanzfall auftritt, in Abhängigkeit von der Erregerfrequenz Ω. **(1,5 Punkte)**

$$\varphi_{\text{part}}(t) = \frac{2\, F_0}{17\, m\, r\left[\frac{8\, c}{17\, m} - \Omega^2\right]}\, \cos(\Omega\, t)$$

$$\overline{c}(\Omega) = \frac{17\, m}{8}\, \Omega^2$$