Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau Institut für Mechanik

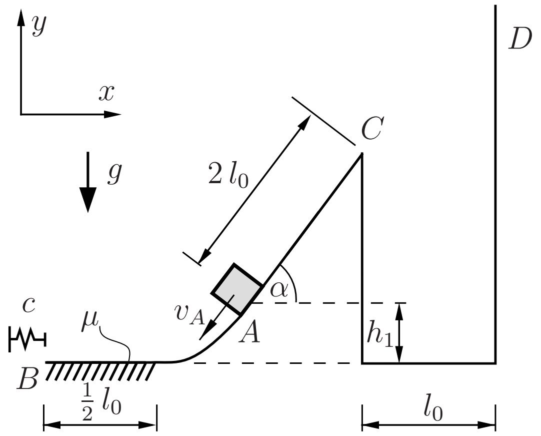
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel

Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Aufgabe 1 (Seite 1 von 3)

a)

Eine Punktmasse m_1 wird in Punkt A mit der initialen Geschwindigkeit v_A in Bewegung gesetzt. Sie trifft in Punkt B auf eine Feder (Federsteifigkeit c), die in der dargestellten Lage entspannt ist. Im horizontalen Bereich vor der Feder wirkt der Gleitreibungskoeffizient μ. Die Punktmasse verlässt die Bahn in Punkt C und erreicht die rechte Wand in Punkt D. Die initiale Geschwindigkeit v_A reicht aus, dass die Punktmasse alle beschriebenen Punkte erreicht. Das System befindet sich im Schwerefeld der Erde g.



Bestimmen Sie die maximale Längenänderung der Feder Δl_c. **(1,5 Punkte)**

$$\Delta l_c = \sqrt{\tfrac{2}{c}\left[\tfrac{1}{2}\, m_1\, v_A^2 + m_1\, g\, h_1 - \mu\, m_1\, g\, \tfrac{1}{2}\, l_0\right]}$$

Bestimmen Sie die Geschwindigkeit v_C mit der die Punktmasse den Punkt C erreicht. **(1,5 Punkte)**

$$v_C = \sqrt{\tfrac{2}{m_1}\left[\tfrac{1}{2}\, m_1\, v_A^2 - \sin(\alpha)\; 2\, l_0\, m_1\, g - 2\, \mu\, m_1\, g\, \tfrac{1}{2}\, l_0\right]}$$

Im Folgenden ist die Geschwindigkeit v_C als bekannt zu betrachten. Bestimmen Sie die Flugzeit t der Punktmasse bis Punkt D erreicht wird. **(1,0 Punkte)**

$$t = \frac{l_0}{v_c \cos(\alpha)}$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau Institut für Mechanik

Prof. Dr.-Ing. A. Menzel

Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 1 (Seite 2 von 3)

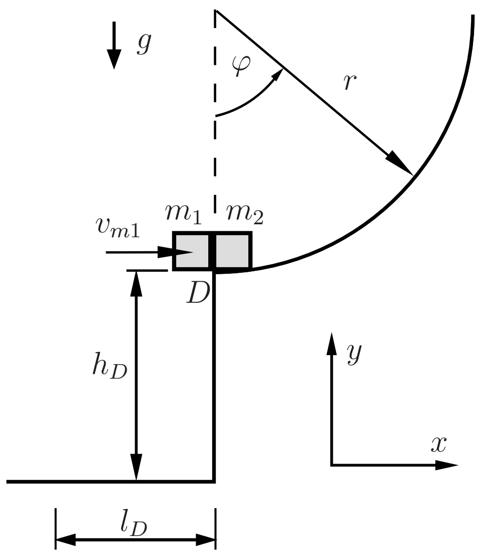
Bestimmen Sie die horizontale und vertikale Geschwindigkeit der Punktmasse v_{xD}, v_{yD} in Punkt D. **(1,5 Punkte)**

$$v_{xD} = v_c \cos(\alpha)$$

$$v_{yD} = v_c \sin(\alpha) - g \, \frac{l_0}{v_c \cos(\alpha)}$$

b)

Für ein anderes, rechts dargestelltes, System wird davon ausgegannngen, dass eine Punktmasse $m_1 = 2\,m$ in Punkt D horizontal, mit der als bekannt anzusehenden Geschwindigkeit v_{m1}, auf eine zweite Punktmasse $m_2 = 3\,m$ trifft. Die zweite Punktmasse befindet sich auf einer reibungsfreien Kreisbahn mit Radius $r = \frac{1}{2}\,l_0$ und ist in ihrer Ruhelage dargstellt. Die Zeichnung stellt den Zustand unmittelbar vor dem Stoß dar. Der Stoß ist vollkommen elastisch. Das System befindet sich im Schwerefeld der Erde g.



Bestimmen Sie die Geschwindigkeiten der beiden Punktmassen unmittelbar nach dem Stoß. **(1,5 Punkte)**

$$\bar{v}_{m1} = -\frac{1}{5}\, v_{m1}$$

$$\bar{v}_{m2} = \frac{4}{5}\, v_{m1}$$

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau Institut für Mechanik

Prof. Dr.-Ing. A. Menzel

Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Aufgabe 1 (Seite 3 von 3)

Bestimmen Sie, für die Situation nach dem Stoß, den horizontalen Abstand l_D zwischen Punkt D und dem Aufprallpunkt der ersten Punktmasse m_1 auf dem Boden. Die Geschwindigkeit $\bar{v}_{m1}$ der ersten Punktmasse m_1 unmittelbar nach dem Stoß ist als bekannt anzunehmen. **(1,0 Punkte)**

$$l_D = \bar{v}_{m1}\,\sqrt{\frac{2\,h_D}{g}}$$

Bestimmen Sie, für die Situation nach dem Stoß, die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}(\varphi)$ der zweiten Punktmasse m_2 in Abhängigkeit des Winkels φ. Die Geschwindigkeit $\bar{v}_{m2}$ der Punktmasse m_2 unmittelbar nach dem Stoß ist als bekannt anzunehmen. **(2,0 Punkte)**

$$\dot{\varphi}(\varphi) = \sqrt{\frac{2}{\left(\frac{1}{2}\,l_0\right)^2}\left[\frac{1}{2}\,\bar{v}_{m2}^2 - g\,\left[\frac{1}{2}\,l_0 - \frac{1}{2}\,l_0\cos\left(\phi\right)\right]\right]}$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau Institut für Mechanik

Prof. Dr.-Ing. A. Menzel

Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

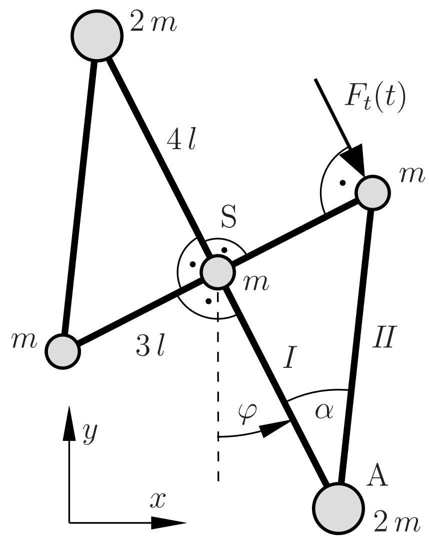
Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 2 (Seite 1 von 3)

Das abgebildete System (punktsymmetrisch zum Schwerpunkt S) aus starren Stäben und Punktmassen wird durch eine von der Zeit t abhängige Kraft $F_t(t) = 3\,F\,\exp(-k\,t)$, die immer senkrecht zu dem kürzeren Stab (Länge $3\,l$) angreift, belastet. Die Verdrehung des längeren Stabes (Länge $4\,l$) zur Senkrechten sei durch φ beschrieben.

Hinweis: Auf Basis der Längen ergibt sich

$$\sin(\alpha) = \frac{3}{5} \quad \text{und} \quad \cos(\alpha) = \frac{4}{5}\,.$$



a)
Bestimmen Sie die Beschleunigung des Schwerpunkts S für die dargestellte Lage zum Zeitpunkt $t^\star$. **(1,0 Punkte)**

$$7\,m\,\ddot{x}_S = \hat{F}(t)\,\sin\varphi$$

$$7\,m\,\ddot{y}_S = -\hat{F}(t)\,\cos\varphi$$

b)
Berechnen Sie das Massenträgheitsmoment des Systems bezogen auf seinen Schwerpunkt S. **(1,0 Punkte)**

$$\theta_\mathrm{S} = 2\cdot m\cdot[3\,l]^2 + 2\cdot 2\,m\cdot[4\,l]^2 = 82\,m\,l^2$$

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau Institut für Mechanik

Prof. Dr.-Ing. A. Menzel

Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Aufgabe 2 (Seite 2 von 3)

c)
Die Beschleunigungen des Schwerpunkts ($\ddot{x}_S$, $\ddot{y}_S$, $\ddot{z}_S = 0$) als auch Winkelbeschleunigung $\ddot{\varphi}$, Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ und Auslenkung φ können nun als bekannt angenommen werden. Geben Sie unter Berücksichtigung dieser Vorraussetzungen die Beschleunigung des Punktes A an. Fassen Sie auftretende Terme nicht zusammen. **(2,0 Punkte)**

$$\begin{bmatrix} \ddot{x}_A \\ \ddot{y}_A \\ \ddot{z}_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{x}_S \\ \ddot{y}_S \\ \ddot{z}_S \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\varphi} \end{bmatrix} \times 4\,l \begin{bmatrix} \sin\varphi \\ -\cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} \times \left[\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} \times 4\,l \begin{bmatrix} \sin\varphi \\ -\cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix} \right]$$

d)
Bestimmen Sie jetzt die Winkelbeschleunigung $\ddot{\varphi}$, die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ und die Auslenkung φ in Abhängigkeit der Zeit t. Nehmen Sie dazu an, dass das System sich zu Beginn ($t = 0$) in Ruhe befindet. Das Massenträgheitsmoment bezogen auf den Schwerpunkt θ_{S} sei bekannt. **(2,5 Punkte)**

$$\ddot{\varphi} = -\frac{9\,F\,l}{\theta}\,e^{-k\,t}$$

$$\dot{\varphi} = \frac{9\,F\,l}{k\,\theta}\,[e^{-k\,t} - 1]$$

$$\varphi = -\frac{9\,F\,l}{k^2\,\theta}\,[e^{-k\,t} + k\,t - 1]$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau Institut für Mechanik

Prof. Dr.-Ing. A. Menzel

Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

e)
Bestimmen Sie die Kräfte S_1 und S_2 in den Stäben I und II. Die Beschleunigung des Punktes A parallel und senkrecht zur Richtung des Stabes I sei durch $a_\parallel$ und $a_\perp$ (beide in der dargestellten Lage mit positiven y-Anteilen) vorgegeben. (**2,5 Punkte**)

$$S_1 = 2\,m\,a_\parallel - \frac{8}{3}\,m\,a_\perp$$

$$S_2 = \frac{10}{3}\,m\,a_\perp$$

f)
Nehmen Sie nun an, dass sich die Stäbe elastisch und nicht mehr starr verhalten. Wie würde sich (qualitativ) die Winkelbeschleunigung des Systems ändern? Überlegen Sie inwiefern die Punktmassen beeinflusst werden und begründen Sie ihre Antwort **kurz**. (**1,0 Punkte**)

Fliehkräfte $\rightarrow$ Massen nach außen $\rightarrow$ θ wird größer $\rightarrow$ Winkelgeschwindigkeit sinkt
alternativ:
Energiebetrachtung $\rightarrow$ Anteil in elastische Verformungsenergie $\rightarrow$ weniger Anteil in Rotationsenergie

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

TU Dortmund

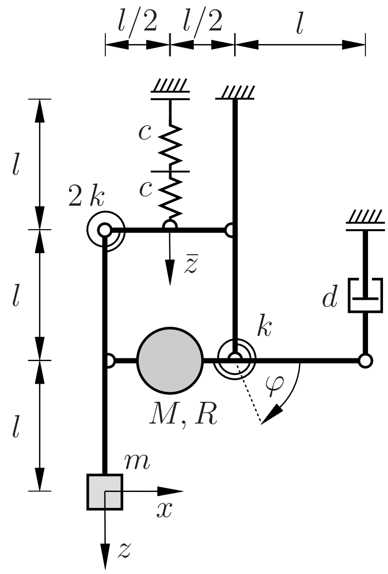
Fakultät Maschinenbau Institut für Mechanik

Prof. Dr.-Ing. A. Menzel

Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Aufgabe 3 (Seite 1 von 3)

Das dargestellte System besteht aus starren Stangen, an deren Verbindungsgelenken teilweise Drehfedern der Steifigkeiten k bzw. $2\,k$ angebracht sind. Zusätzlich wird das System von zwei vertikal angebrachten Federn der Steifigkeit c und einem Dämpfer mit Dämpfungskonstante d gestützt. An der unteren horizontalen Stange befindet sich eine Kreisscheibe der Masse $M = 2\,m$ mit Radius $R = l/4$; An der unteren vertikalen Stange ist eine Punktmasse m abgebracht. Die Maße sind der Zeichnung zu entnehmen.
Hinweis: Im Folgenden ist die Kinematik für große Auslenkungen zu berücksichtigen.



a)
Geben Sie die Geschwindigkeiten $\dot{x}$, $\dot{z}$ sowie $\dot{\bar{z}}$ als Funktionen der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ und des Winkels φ an. **(2,5 Punkte)**

$$\dot{x}(\dot{\varphi},\varphi) = l\,\sin(\varphi)\dot{\varphi}$$

$$\dot{z}(\dot{\varphi},\varphi) = -l\,\cos(\varphi)\dot{\varphi}$$

$$\dot{\bar{z}}(\dot{\varphi},\varphi) = -\frac{1}{2}\,l\,\cos(\varphi)\dot{\varphi}$$

Bestimmen Sie die Funktion der virtuellen Arbeit δW aller nicht konservativen Komponenten des Systems in Abhängigkeit der Koordinate φ. **(1,0 Punkte)**

$$\delta W = -l^2\,\cos^2(\varphi)\dot{\varphi}\,d\,\delta\varphi$$

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau Institut für Mechanik

Prof. Dr.-Ing. A. Menzel

Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Aufgabe 3 (Seite 2 von 3)

b)
Geben Sie die Ersatzfedersteifigkeit c_{ges} der vertikalen Federn bzgl. der Koordinate $\bar{z}$ sowie die Ersatzfedersteifigkeit k_{ges} der Drehfedern bzgl. der Koordinate φ an. **(1,0 Punkte)**

$$c_{\text{ges}} = \frac{c}{2} \qquad\qquad k_{\text{ges}} = 3\,k$$

Berechnen Sie die Funktionen der potentiellen sowie der kinetischen Energien E_{pot} und E_{kin} in Abhängigkeit der Koordinaten x, z, $\bar{z}$, und φ. Geben Sie auch die von Ihnen verwendeten Massenträgheitsmomente an. **(2,5 Punkte)**

$$E_{\text{pot}} = \frac{1}{2}\,k_{\text{ges}}\,\varphi^2 + \frac{1}{2}c_{\text{ges}}\,\bar{z}^2$$

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}\,m\,\left[\dot{x}^2 + \dot{z}^2\right] + \frac{1}{2}\,\Theta_R\,\dot{\varphi}^2$$

$$\text{mit}\quad \Theta_R = \frac{9}{16}\,m\,l^2$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau Institut für Mechanik

Prof. Dr.-Ing. A. Menzel

Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 3 (Seite 3 von 3)

c)
Für ein anderes System mit einem Freiheitsgrad x sind die potentielle und kinetische Energie sowie die virtuelle Arbeit externer Lasten mit

$$\begin{aligned} E_{\text{pot}}(x) &= 18\, m\, g\, [l + x] + 2\, c\, x^2\,, \\ E_{\text{kin}}(x) &= 9\, m\, \dot{x}^2 + 4\, \Theta \left[\frac{\dot{x}}{l}\right]^2 \,, \\ \delta W &= F_0 \cos(\Omega\, t)\, \delta x \end{aligned}$$

gegeben. Stellen Sie **basierend hierauf** die Bewegungsdifferentialgleichung des Systems bezüglich x auf. **(2,0 Punkte)**

$$-18\, m\, g - 4\, c\, x - 18\, m\, \ddot{x} - 8\, \frac{\Theta}{l^2}\, \ddot{x} = -F_0\, \cos(\Omega\, t)$$

Bestimmen Sie die Erregerfrequenz Ω, bei der für dieses System der Resonanzfall eintritt. **(1,0 Punkte)**

$$\Omega = \sqrt{\frac{4\, c}{18\, m + 8\frac{\Theta}{l^2}}}$$