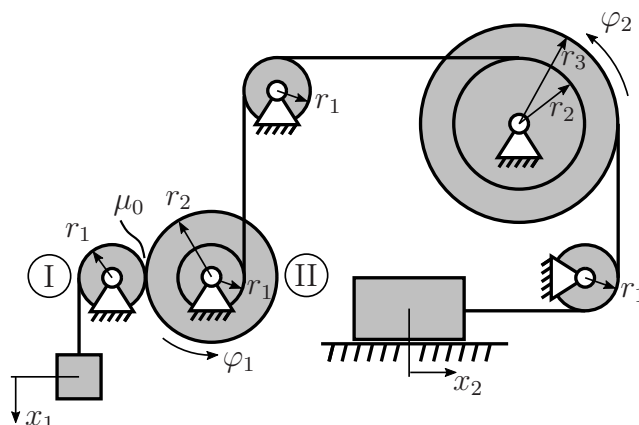


**Aufgabe 1** (Seite 1 von 3)

a)

Für das hier abgebildete System sollen die kinematischen Bindungen bestimmt werden. Die Rolle I rollt schlupffrei auf der Stufenrolle II ab. Die Seile, welche auf den beiden Rollen I und II aufgerollt sind, sind nicht miteinander verbunden. Es kann angenommen werden, dass beide Seile stets gespannt bleiben. Beachten Sie bei der Bearbeitung die eingezeichneten Freiheitsgrade sowie daraus resultierende Vorzeichen.



Bestimmen Sie die kinematischen Bindungen  $\dot{\varphi}_1(\dot{x}_1)$  und  $\dot{x}_2(\dot{\varphi}_1)$ .

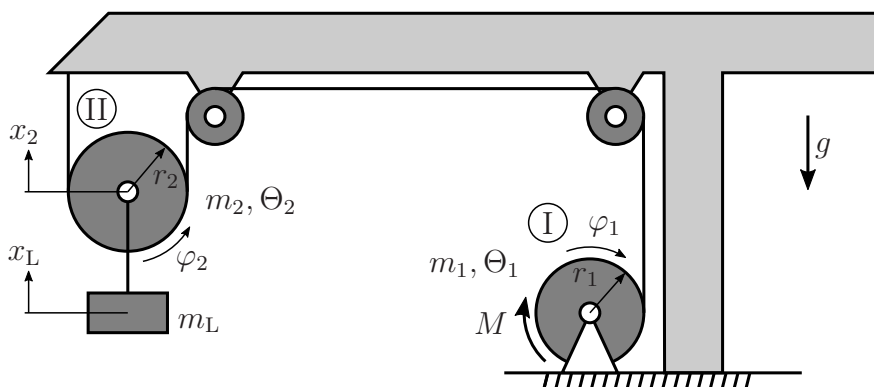
(2,5 Punkte)

$\dot{\varphi}_1(\dot{x}_1) =$

$\dot{x}_2(\dot{\varphi}_1) =$

b)

Die folgende Abbildung zeigt ein einfaches Modell für einen Kran. Die Masse  $m_L$  ist an der Rolle II aufgehängt und wird über einen Seilzug von einem Motor angehoben, der an der Rolle I das Drehmoment  $M$  einleitet. Die beiden mittleren Umlenkrollen können als masselos betrachtet werden und sind fest mit dem Kran verbunden, während die restlichen Systemgrößen sowie Koordinatensysteme aus der Zeichnung zu entnehmen sind. Die gegebenen Massenträgheitsmomente  $\Theta_1$  und  $\Theta_2$  beziehen sich jeweils auf den Mittelpunkt der Rollen.



**Aufgabe 1** (Seite 2 von 3)

Die folgenden kinematischen Bindungen gelten für das System:

$$\dot{x}_2 = \dot{x}_L, \quad \dot{\varphi}_2 = \frac{\dot{x}_L}{r_2}, \quad \dot{\varphi}_1 = 2 \frac{\dot{x}_L}{r_1}.$$

**Geben Sie alle Lösungen für den Aufgabenteil b) in Abhängigkeit des Freiheitsgrads  $x_L$  an.**

Bestimmen Sie die resultierende Kraft  $S_1$  im Seil zwischen der Rolle II und der Masse  $m_L$ .  
**(1,5 Punkte)**

$$S_1 =$$

Bestimmen Sie die resultierende Kraft  $S_2$  im Seil zwischen der Rolle II und der Umlenkrolle.  
**(1,5 Punkte)**

$$S_2 =$$

Bestimmen Sie das Drehmoment  $M$ , welches der Motor aufbringen muss, um eine vorgegebene Beschleunigung  $a$  der Masse  $m_L$  in Richtung von  $x_L$  zu erreichen. **(1,5 Punkte)**

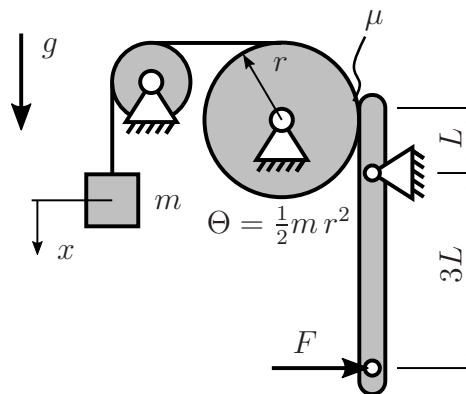
$$M =$$

**Aufgabe 1** (Seite 3 von 3)

c)

Die nebenstehende Abbildung zeigt eine einfache Bremsvorrichtung. Die Bewegung des Systems kann gebremst werden, indem eine Kraft  $F$  am unteren Ende des Hebels aufgebracht wird. Zwischen der Rolle und dem Hebel gelte der Gleitreibungskoeffizient  $\mu$ . Solange sich die Masse  $m$  weiter nach unten bewegt gilt für das System der Zusammenhang

$$mg - 3\mu F - \frac{3}{2}m\ddot{x} = 0 .$$



Bestimmen Sie zunächst die eingezeichnete Bremskraft  $F$  so, dass die Bremsbeschleunigung der Masse den Wert  $\ddot{x} = -a$  annimmt. **(1,0 Punkte)**

$F =$

Zum Zeitpunkt  $t = 0$  befindet sich die Masse  $m$  auf der Höhe  $h_0$  über dem Boden und bewegt sich mit der Geschwindigkeit  $v_0$  senkrecht nach unten. Ab diesem Zeitpunkt werde das System nun durch die Kraft  $F$  gebremst.

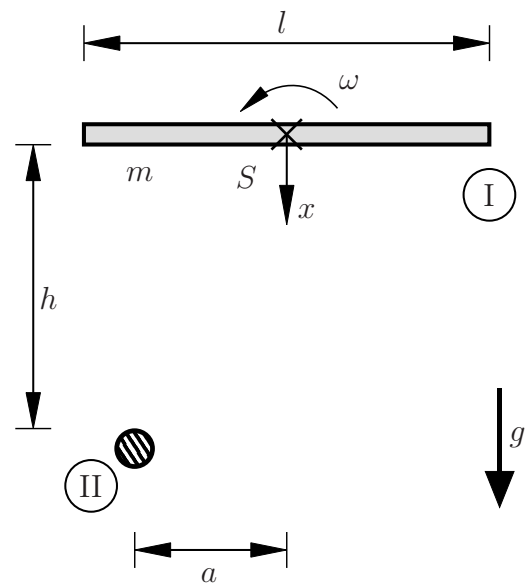
Welche Bedingung muss für  $F$  gelten, damit die Masse nicht auf dem Boden aufschlägt? **(2,0 Punkte)**

$F >$

**Aufgabe 2** (Seite 1 von 4)

a)

Im Folgenden wird ein Balken I (Länge  $l$ , Masse  $m$  Schwerpunkt  $S$ ) aus einer Höhe  $h$  aus der Ruhelage losgelassen. Dabei wirkt die Erdbeschleunigung  $g$ . Anschließend stößt der Balken gegen einen raumfesten Punkt II. Für den Stoß gilt die Stoßzahl  $e$ . Die Geschwindigkeit und Winkelgeschwindigkeit des Balkens lassen sich über die gegebenen Koordinaten  $x$  und  $\omega$  beschreiben. Während des Stoßvorgangs kann der Einfluss der Gravitation vernachlässigt werden.



Bestimmen Sie die Geschwindigkeit  $v_S$  des Schwerpunktes des Balkens kurz vor dem Aufprall mit dem raumfesten Punkt bezogen auf das gegebene Koordinatensystem.

(1,0 Punkte)

$v_S =$

Sei nun die absolute Geschwindigkeit  $v_S$  des Balkens vor dem Stoß bekannt.

Bestimmen Sie die Geschwindigkeit des Balkens im Stoßpunkt direkt nach dem Stoß  $\bar{v}_P$  bezogen auf das gegebene Koordinatensystem.

(1,0 Punkte)

$\bar{v}_P =$

Vorname: \_\_\_\_\_

Nachname: \_\_\_\_\_

Matr.-Nr.: \_\_\_\_\_

**Aufgabe 2** (Seite 2 von 4)

Im Folgenden kann die Geschwindigkeit des Balkens im Stoßpunkt direkt nach dem Stoß  $\bar{v}_P$  als bekannt betrachtet werden.

Bestimmen Sie die Winkelgeschwindigkeit  $\bar{\omega}$  sowie die resultierende Geschwindigkeit des Balkens im Schwerpunkt  $\bar{v}_S$  direkt nach dem Stoß bezogen auf das gegebene Koordinatensystem.

**(3,0 Punkte)**

$$\bar{\omega} =$$

$$\bar{v}_S =$$

Seien nun die Geschwindigkeiten  $\bar{v}_S$  und  $\bar{\omega}$  direkt nach dem Stoß gegeben.

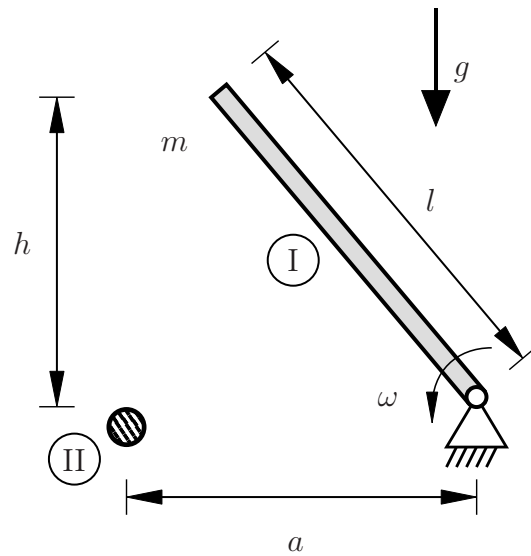
Bestimmen Sie den Impuls  $\hat{F}$ , der im gesamten Stoßvorgang wirkt. **(1,0 Punkte)**

$$\hat{F} =$$

**Aufgabe 2** (Seite 3 von 4)

b)

Ein Balken I der Länge  $l$  und Masse  $m$  ist auf der rechten Seite gelagert und befindet sich in der Skizze in Ruhelage, so dass das linke Ende die Höhe  $h$  gegenüber dem raumfesten Auftreffpunkt II hat. Der Auftreffpunkt ist  $a < l$  von der Lagerung entfernt. Es wirkt die Erdbeschleunigung  $g$ . Während des Stoßvorgangs kann der Einfluss der Gravitation vernachlässigt werden.



Die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$ , die durch die Erdbeschleunigung  $g$  kurz vor dem Stoß erreicht wird, ist in Abhängigkeit der Höhe bekannt als

$$\omega = \frac{\sqrt{3gh}}{l}.$$

Bestimmen Sie die Stoßzahl  $e$  aus dem Quotienten  $h^*/h$  der Ausgangshöhe  $h$  und der Rückschlaghöhe  $h^*$  nach dem Stoß. Geben Sie dazu auch das Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten  $\bar{\omega}/\omega$  kurz vor und kurz nach dem Stoß in Abhängigkeit des Höhenquotienten  $h^*/h$  an. **(1,5 Punkte)**

$e =$

$\frac{\bar{\omega}}{\omega} =$

Vorname: \_\_\_\_\_

Nachname: \_\_\_\_\_

Matr.-Nr.: \_\_\_\_\_

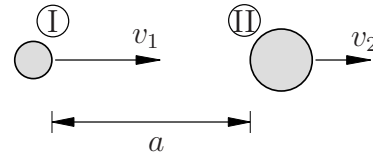
**Aufgabe 2** (Seite 4 von 4)

Bestimmen Sie die im Stoß dissipierte Energie  $D$ , also die Energie die nach dem Stoß nicht wieder in Bewegungsenergie umgewandelt wurde, aus den Höhen  $h^*$  und  $h$ . (1,0 Punkte)

$$D =$$

c)

Im Folgenden sollen zwei Kugeln I und II betrachtet werden, zwischen denen ein **vollplastischer** Stoß entsteht. Kugel I hat die Masse  $m_1$  und die Ausgangsgeschwindigkeit  $v_1$ . Kugel II hat die Masse  $m_2$  und eine Ausgangsgeschwindigkeit  $v_2 < v_1$ .



Nach welcher Zeit  $t$  treffen die Kugeln aufeinander?

(0,5 Punkte)

$$t =$$

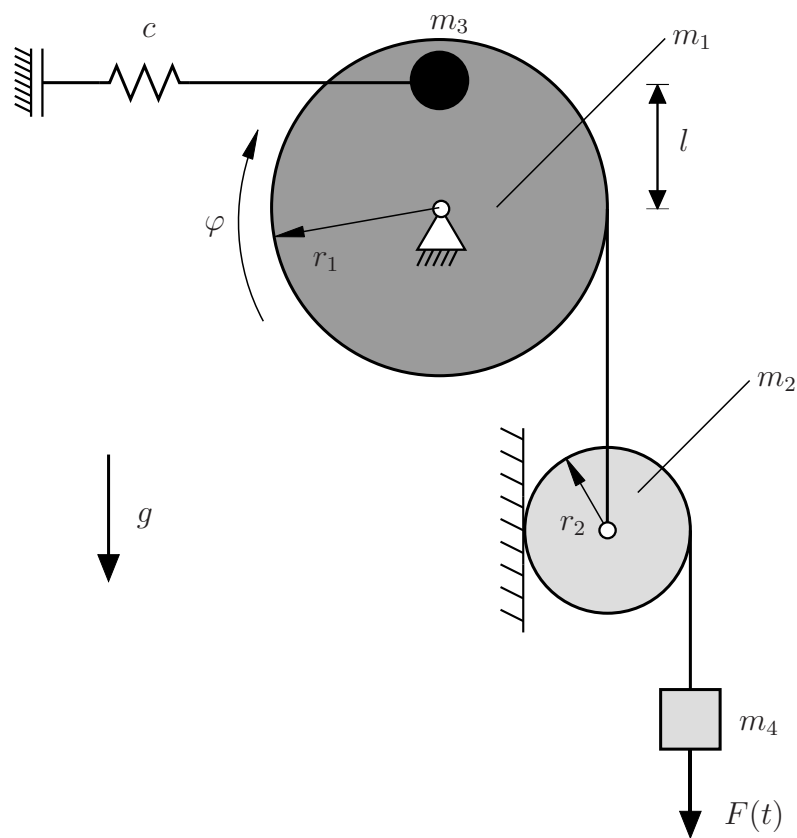
Wie groß ist das Verhältnis der Ausgangsgeschwindigkeiten  $\frac{v_1}{v_2}$  in Abhängigkeit der Massen  $m_1$  und  $m_2$ , wenn die resultierende Geschwindigkeit nach dem Stoß  $\bar{v} = 2 v_2$  ist?

(1,0 Punkte)

$$\frac{v_1}{v_2} =$$

**Aufgabe 3** (Seite 1 von 3)

Eine Scheibe (Radius  $r_1$  und Masse  $m_1$ ) ist mittig gelagert und durch ein Seil mit einer kleinen Scheibe (Radius  $r_2$  und Masse  $m_2$ ) verbunden. Zusätzlich befindet sich eine Punktmasse (Masse  $m_3$ ) auf der großen Scheibe und ist mit einer Feder (Federsteifigkeit  $c$ ) verbunden, welche in der dargestellten Lage ungespannt ist. Die kleine Scheibe rollt schlupffrei ab und ist durch ein Seil mit einer Punktmasse (Masse  $m_4$ ) und einer eingprägten zeitabhängigen Kraft  $F(t)$  verbunden. Die auf den Scheiben aufgerollten Seile sind stets gespannt und das System befindet sich im Schwerfeld der Erde.



a)

Bestimmen Sie, für große Auslenkungen des Systems, die potentielle Energie  $E_{\text{pot}}$  in Abhängigkeit der Koordinate  $\varphi$ . **(2,0 Punkte)**

$E_{\text{pot}} =$



**Aufgabe 3** (Seite 2 von 3)

Bestimmen Sie die kinetische Energie  $E_{\text{kin}}$  des gesamten Systems in Abhängigkeit der Winkelgeschwindigkeit  $\dot{\varphi}$ . **(2,0 Punkte)**

$$E_{\text{kin}} =$$

Bestimmen Sie die generalisierte Kraft des Systems bezogen auf die Koordinate  $\varphi$ . **(1,0 Punkte)**

$$Q =$$

b)

Für ein anderes, nicht näher spezifiziertes, System ergeben sich die Energien sowie die nichtkonservativen Kräfte zu

$$E_{\text{pot}} = m g l [1 - \sin(\phi)] + c l^2 \cos(\phi)^2 ,$$

$$E_{\text{kin}} = \frac{m l^2}{2} \dot{\phi}^2 ,$$

$$Q_M = M_0 \cos(\Omega t) ,$$

$$Q_D = -d l^2 \cos(\phi)^2 \dot{\phi} .$$

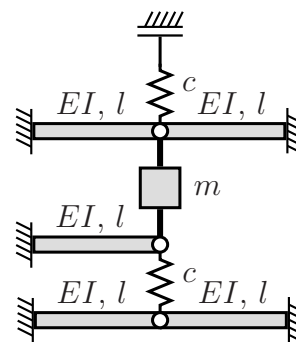
Geben Sie die Bewegungs-Differentialgleichung bezüglich des Drehwinkels  $\phi$  für große Auslenkungen des Systems an. **(2,0 Punkte)**

**Aufgabe 3** (Seite 3 von 3)

Geben Sie die linearisierte Form der vorher bestimmten Bewegungs-Differentialgleichung um die Ausgangslage ( $\phi_0 = 0, \dot{\phi}_0 = 0, \ddot{\phi}_0 = 0$ ) an. **(1,0 Punkte)**

c)

Das dargestellte System besteht aus zwei Federn (Federsteifigkeit jeweils  $c$ ) und fünf Balken (Biegesteifigkeit jeweils  $EI$ , Länge jeweils  $l$ ). Beiträge aus Dehn- und Schubsteifigkeiten der Balken sollen vernachlässigt werden. Die Masse  $m$  ist über zwei starre masseelose Stäbe mit den Balkenenden verbunden.



Berechnen Sie die aus den Federn und den Balken resultierende Ersatzfedersteifigkeit  $c^{ers}$  bezüglich der vertikalen Verschiebung der Masse. **(2,5 Punkte)**

$c^{ers} =$

Bestimmen Sie die zugehörige Eigenkreisfrequenz  $\omega_0$  des Systems. **(0,5 Punkte)**

$\omega_0 =$