TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

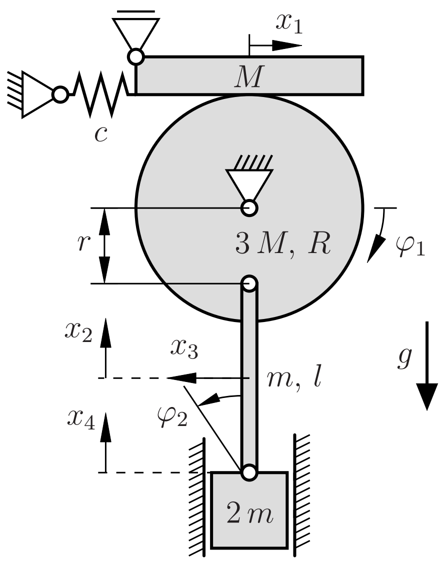
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 1 (Seite 1 von 3)

Das rechts abgebildete System befindet sich im Schwerefeld (Erdbeschleunigung g). Es besteht aus einer Rolle (Masse $3\,M$, Radius R) auf der ein Block (Masse M) schlupffrei abrollt. Der Block ist mit einer Feder (Federsteifigkeit c) verbunden und mit einem Loslager aufgehängt. An der Rolle ist weiterhin eine Stange (Masse m, Länge l) mit der Exzentrizität r drehbar angebracht. An der Stange befindet sich ein vertikal geführter Block (Masse $2\,m$). Die Feder ist in der dargestellten Lage ungespannt.



a)
Geben Sie die Beziehung zwischen den Winkeln φ_1 und φ_2 an. Bestimmen Sie außerdem x_1, x_2, x_3 und x_4 in Abhängigkeit von den Koordinaten φ_1 und/oder φ_2. (**2,5 Punkte**)

Beziehung zwischen φ_1 und φ_2:

$r\,\sin(\varphi_1) = l\,\sin(\varphi_2)$

$x_1 = \varphi_1\,R$

$x_2 = r\,[1-\cos(\varphi_1)] + \frac{1}{2}\,l\,[1-\cos(\varphi_2)]$

$x_3 = \frac{1}{2}\,l\,\sin(\varphi_2)$

$x_4 = r\,[1-\cos(\varphi_1)] + l\,[1-\cos(\varphi_2)]$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 1 (Seite 2 von 3)

b)
Bestimmen Sie die potentielle Energie E_{pot} und die kinetische Energie E_{kin} des Systems in Abhängigkeit von den Koordinaten x_1, x_2, x_3, x_4, φ_1 und φ_2.
Hinweis: Die kinematischen Bindungen sind hier nicht zu berücksichtigen. (**2,5 Punkte**)

$$E_{\text{pot}} = \frac{1}{2}\, c\, x_1^2 + 2\, m\, g\, x_4 + m\, g\, x_2$$

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}\, M\, \dot{x}_1^2 + \frac{3}{4}\, M\, R^2\, \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}\, m\, [\dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2] + \frac{1}{24}\, m\, l^2\, \dot{\varphi}_2^2 + m\, \dot{x}_4^2$$

c)
Der obere Block (Masse M) wird nun blockiert ($x_1 = 0$), sodass er mittig auf der Rolle aufliegt. Der Reibkoeffizient zwischen der Rolle und dem Block sei μ. Bestimmen Sie die virtuelle Arbeit der Reibung in Abhängigkeit der Koordinate x_2, x_3, x_4, φ_1 oder φ_2. (**1,0 Punkte**)

$$\delta W_R = -\mu\, M\, g\, R\, \delta\varphi_1$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 1 (Seite 3 von 3)

d)
Für ein anderes System sind die potentielle Energie (E_{pot}) und die kinetische Energie (E_{kin}) in Abhängigkeit der Koordinate φ sowie die verallgemeinerten nicht-konservativen Lasten bezogen auf die Koordinate φ durch

$$E_{\text{pot}} = \frac{1}{2}\, c\, l^2 \sin^2(\varphi) + c\, l^2 \left[1 - \cos(\varphi)\right]$$

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{24}\, m\, l^2\, \dot{\varphi}^2$$

$$Q_D = -d\, l^2\, \cos^2(\varphi)\, \dot{\varphi}$$

$$Q_F = M(t)$$

vorgegeben.
Bestimmen Sie die linearisierte Form der Bewegungsgleichung für kleine Auslenkungen um die Ausgangslage ($\varphi = 0$). **(3,0 Punkte)**

$$-c\, l^2\, \sin(\varphi)\, \cos(\varphi) - c\, l^2\, \sin(\varphi) - \tfrac{1}{12}\, m\, l^2\, \ddot{\varphi} = d\, l^2\, \cos^2(\varphi)\, \dot{\varphi} - M(t)$$

$$\ddot{\varphi} + 12\, \tfrac{d}{m}\, \dot{\varphi} + 24\, \tfrac{c}{m}\, \varphi = \tfrac{12}{m\, l^2}\, M(t)$$

Legen Sie die Dämpfungskonstante d so aus, dass das System die höchste Konvergenzgeschwindigkeit zur Ruhelage hat. **(1,0 Punkte)**

$$d = \sqrt{\tfrac{2}{3}\, m\, c}$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

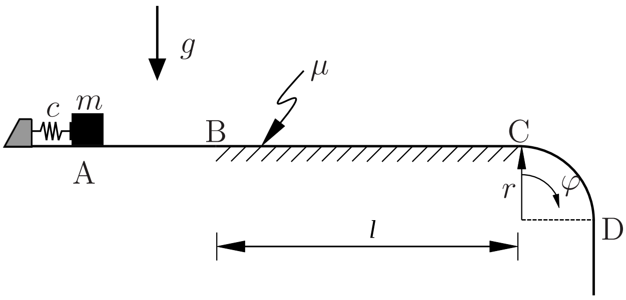
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 2 (Seite 1 von 2)

Eine punktförmige Masse m wird aus der Ruhelage in Punkt A durch Entspannen einer vorgespannten Feder (Federkonstante c) in Bewegung gesetzt. Die Masse gleitet zunächst reibungsfrei bis zum Punkt B. Der Bereich zwischen den Punkten B und C ist reibungsbehaftet (Gleitreibungskoeffizient μ). Ab Punkt C verläuft die Bahn gekrümmt und reibungsfrei weiter (Radius r). Die Masse befindet sich im Schwerefeld (Beschleunigung g). Übergänge zwischen einem ebenen und einem gekrümmtem Bahnabschnitt verlaufen geometrisch glatt.



a)
Bestimmen Sie die Anfangsauslenkung Δl der Feder in Punkt A, damit die Masse den Punkt B exakt mit einer bekannten Geschwindigkeit v_B erreicht. **(1,0 Punkte)**

$$\Delta l = \sqrt{\frac{m}{c}}\, v_\mathrm{B}$$

b)
Die Geschwindigkeit v_B ist nach wie vor als bekannt vorauszusetzen. Wie groß muss der Gleitreibungskoeffizient μ sein, damit die Masse den Punkt C exakt mit einer bekannten Geschwindigkeit $v_\mathrm{C} > 0$ erreicht. **(2,0 Punkte)**

$$\mu = \frac{1}{2\,g\,l}\,(v_\mathrm{B}^2 - v_\mathrm{C}^2)$$

c)
Die Geschwindigkeit $v_\mathrm{C} > 0$ ist in den folgenden Aufgabenteilen als bekannt vorauszusetzen. Des Weiteren können Sie davon ausgehen, dass die Masse die Bahn nicht verlässt. Bestimmen Sie die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}(\varphi)$ im Abschnitt C bis D. **(2,0 Punkte)**

$$\dot{\varphi}(\varphi) = \sqrt{v_\mathrm{C}^2 + 2\,g\,r\,[1 - \cos(\varphi)]}\,\frac{1}{r}$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 2 (Seite 2 von 2)

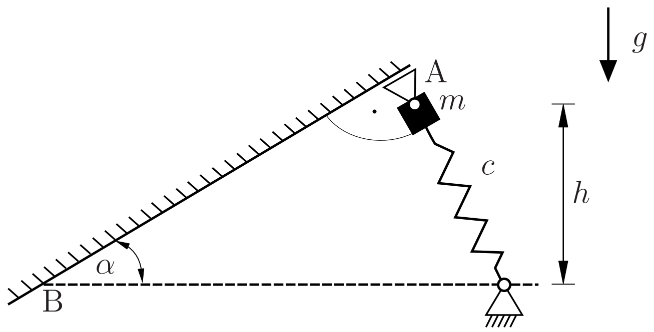
Bestimmen Sie die vom Winkel φ abhängige Normalkraft (d.h. Normalkomponente der Kontaktkraft) $N(\varphi)$ im Abschnitt C bis D. **(2,0 Punkte)**

$$N(\varphi) = 3\,m\,g\cos(\varphi) - \frac{m}{r}v_{\mathrm{C}}^2 - 2\,m\,g$$

d)
Bestimmen Sie die Winkelbeschleunigung $\ddot{\varphi}$ im Abschnitt C bis D. **(1,0 Punkte)**

$$\ddot{\varphi} = \frac{g}{r}\sin(\varphi)$$

e)
Eine Masse m befindet sich an einem Loslager in Punkt A in Ruhe ($v_A = 0$) und wird durch eine in dieser Lage ungespannte Feder (Federkonstante c, ungespannte Länge l_0) gehalten.



Bestimmen Sie die Geschwindigkeit der Masse in Punkt B. Gehen Sie davon aus, dass das Loslager mit der Masse reibungsfrei die schiefe Ebene hinuntergleiten kann und der Punkt B erreicht wird. **(2,0 Punkte)**

$$v_{\mathrm{B}} = \sqrt{2\,g\,h - \frac{c}{m}\,l_0^2\left(\frac{1}{\sin(\alpha)} - 1\right)^2}$$

TU Dortmund

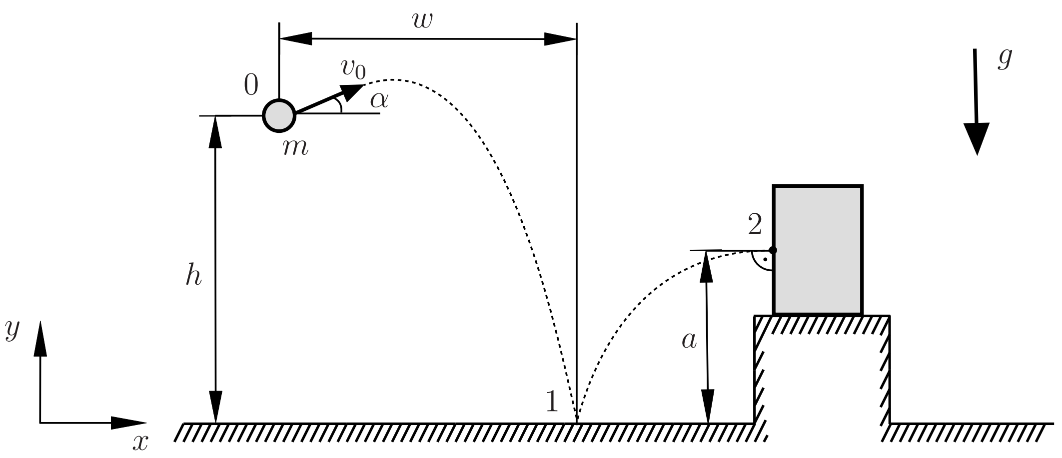
Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 3 (Seite 1 von 3)



Eine Punktmasse m weist im Punkt 0 (Höhe h) eine Anfangsgeschwindigkeit v_0 mit Anstellwinkel α auf. Die Punktmasse trifft zuerst auf den Boden (Punkt 1), bevor anschließend ein Körper im Punkt 2 getroffen wird. Es wirkt die Erdbeschleunigung g.

a)

Berechnen Sie die Flugzeit Δt_{01} der Punktmasse bis zum ersten Aufprall im Punkt 1. Bestimmen Sie außerdem die Wurfweite w (bis zum Aufprall im Punkt 1).

(1,5 Punkte)

$$\begin{aligned}\Delta t_{01} &= \frac{v_0 \sin\alpha}{g} + \sqrt{\left[\frac{v_0 \sin\alpha}{g}\right]^2 + \frac{2\,h}{g}} \\ w &= v_0 \cos\alpha\,\Delta t_{01}\end{aligned}$$

b)

Berechnen Sie die Koordinaten des Geschwindigkeitsvektors $\bar{\boldsymbol{v}}_1 = \bar{v}_{1x}\,\boldsymbol{e}_x + \bar{v}_{1y}\,\boldsymbol{e}_y$ nach dem Aufprall im Punkt 1. Die Stoßzahl zwischen Boden und Punktmasse sei allgemein $e \in (0,1]$.

(1,5 Punkte)

$$\begin{aligned}\bar{v}_{1x} &= v_0 \cos\alpha \\ \bar{v}_{1y} &= -e\sqrt{[v_0]^2\,\sin^2\alpha + 2\,g\,h}\end{aligned}$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

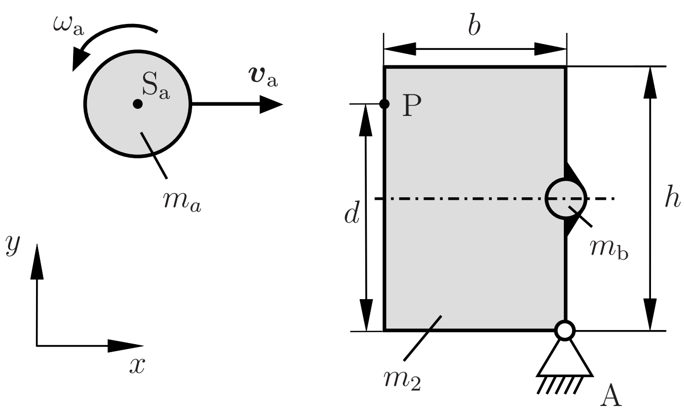
Aufgabe 3 (Seite 2 von 3)

Anschließend trifft die Punktmasse den Körper senkrecht im Punkt 2. Geben Sie die Höhe a in Abhängigkeit von den eingeführten Größen v_0, α, e, h, g an.

(1,5 Punkte)

$$a = \frac{1}{2}\frac{[\bar{v}_{1y}]^2}{g} = \frac{1}{2}\frac{e^2}{g}\left[[\,v_0 \sin\alpha]^2 + 2\,g\,h\right]$$

c)



Es trifft eine Scheibe mit der Masse m_a, der Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}_\mathrm{a} = v_{\mathrm{a}x}\,\boldsymbol{e}_x + 0\,\boldsymbol{e}_y$ und der Winkelgeschwindigkeit ω_a auf einen zusammengesetzten Körper k. Der zusammengesetzte Körper besteht aus einer rechteckigen Masse m_2 mit Breite b und Höhe h und einer angeschweißten Punktmasse m_b. Der Körper ist im Punkt A drehbar gelagert und befindet sich zunächst in Ruhe. Die Schwerkraft wird vernachlässigt.

Berechnen Sie zunächst das Massenträgheitsmoment Θ^A des zusammengesetzen Körpers bezogen auf den Punkt A.

(1,5 Punkte)

$$\Theta^\mathrm{A} = \frac{m_2}{12}\left[b^2 + h^2\right] + m_2\left[\frac{b^2}{4} + \frac{h^2}{4}\right] + m_b\,\frac{h^2}{4} = \frac{m_2}{3}\left[b^2 + h^2\right] + m_b\,\frac{h^2}{4}$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 3 (Seite 3 von 3)

d)

Geben Sie nun sämtliche zur Lösung des teilelastischen Stoßproblems aus Teil c) notwendigen Gleichungen an und begründen Sie Ihre Annahmen. Nehmen Sie die Stoßzahl $e \in (0, 1]$ als gegeben an. Verwenden Sie dabei das Massenträgheitsmoment Θ^{A} des zusammengesetzen Körpers als gegebene Größe. Nennen Sie zudem alle zu berechnenden, unbekannten Größen des Stoßproblems. Gehen Sie davon aus, dass die Oberflächen beider Körper ideal glatt sind.

(4,0 Punkte)

Hinweis: Die Gleichungen müssen nicht gelöst werden.

Gesucht:
Scheibe nach Stoß: $\bar{\omega}_{\mathrm{a}}$, $\bar{v}_{\mathrm{a}x} = \bar{\boldsymbol{v}}_{\mathrm{a}}\, \boldsymbol{e}_x$, $\bar{v}_{\mathrm{a}y} = \bar{\boldsymbol{v}}_{\mathrm{a}}\, \boldsymbol{e}_y$
Zusammengesetzer Körper: $\bar{\omega}_{\mathrm{k}}$
Krafststoß: $\hat{F}_x$

Scheibe:
glatter Stoß $\Rightarrow$ keine Tangentialkraft $\Rightarrow$ $v_{\mathrm{a}y} = \bar{v}_{\mathrm{a}y} = 0$
zentrischer Stoß $\Rightarrow$ $\bar{\omega}_{\mathrm{a}} = \omega_{\mathrm{a}}$

$$[\bar{v}_{\mathrm{a}x} - v_{\mathrm{a}x}]\, m_a \quad = \quad -\hat{F}_x \tag{1}$$

Körper:

$$[\bar{\omega}_{\mathrm{k}} - \omega_{\mathrm{k}}]\, \Theta^{\mathrm{A}} \quad = \quad -\hat{F}_x\, d \quad \text{mit} \quad \omega_{\mathrm{k}} = 0 \tag{2}$$

Stoßzahl:

$$e \quad = \quad -\frac{\bar{v}^{\mathrm{P}}_{\mathrm{a}x} - \bar{v}^{\mathrm{P}}_{\mathrm{k}x}}{v^{\mathrm{P}}_{\mathrm{a}x} - v^{\mathrm{P}}_{\mathrm{k}x}} = -\frac{\bar{v}_{\mathrm{a}x} + \bar{\omega}_{\mathrm{k}}\, d}{v_{\mathrm{a}x}} \tag{3}$$