TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

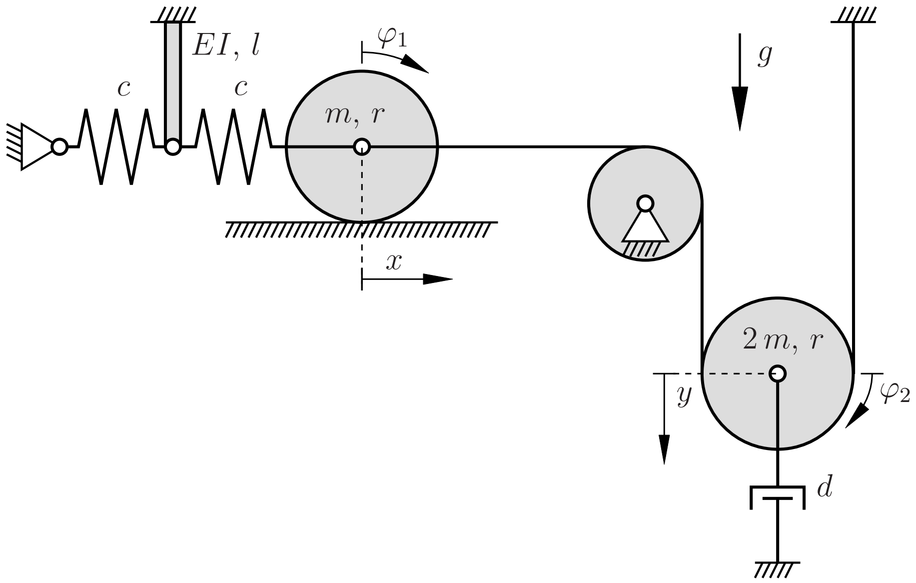
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 1 (Seite 1 von 3)

Das unten abgebildete System befindet sich im Schwerefeld (Erdbeschleunigung g). Es besteht aus einer Rolle (Masse m, Radius r), die über zwei Federn (Federsteifigkeit c) und einem Balken (Biegesteifigkeit EI, Länge l) mit einem Festlager verbunden ist. Auf der gegenüberliegenden Seite ist die Rolle mit einem Seil über eine masselose Umlenkrolle mit einer zweiten Rolle (Masse $2\,m$, Radius r) gekoppelt. Die zweite Rolle ist zusätzlich über einen Stab mit einem Dämpfer (Dämpferkonstante d) verbunden. Sämtliche Bewegungen der Rollen erfolgen schlupffrei. Die Seile sind als stets gespannt anzusehen. Die Federn sind in der dargestellten Lage ungespannt.



a)
Geben Sie die Koordinaten x, y und φ_2 in Abhängigkeit der Koordinate φ_1 an.

(1,5 Punkte)

$x = \varphi\, r$

$y = \frac{1}{2}\varphi\, r$

$\varphi_2 = -\frac{1}{2}\varphi$

Aufgabe 1 (Seite 2 von 3)

b)
Bestimmen Sie die aus den Federn und dem Balken resultierende Ersatzfedersteifigkeit c^*. **(1,5 Punkte)**

$$c^* = \frac{c\left[c\,l^3 + 3\,EI\right]}{2\,c\,l^3 + 3\,EI}$$

c)
Bestimmen Sie die potentielle E_{pot} und kinetische Energie E_{kin} des Systems in Abhängigkeit der Koordinaten x, y, φ_1 und φ_2. Das aus den beiden Federn und dem eingespannten Balken bestehende Teilsystem soll durch eine äquivalente Feder ersetzt werden, die zu verwendende Ersatzfedersteifigkeit c^* ist hier als gegeben anzusehen und soll **nicht** aus Teil b) übernommen werden.
Hinweis: Die kinematischen Bindungen sind hier **nicht** zu berücksichtigen. **(2,0 Punkte)**

$$E_{\mathrm{pot}} = \frac{1}{2}c^* x^2 - 2\,m\,g\,y$$

$$E_{\mathrm{kin}} = \frac{3}{4}m\,r^2\dot{\varphi}_1{}^2 + \frac{3}{2}m\,r^2\dot{\varphi}_2{}^2$$

d)
Bestimmen Sie die virtuelle Arbeit des Dämpfers δW_D in Abhängigkeit der Koordinate x, y, φ_1 oder φ_2. **(1,0 Punkte)**

$$\delta W_D = -d\,\dot{y}\,\delta y$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 1 (Seite 3 von 3)

e)
Für ein anderes System sind die kinetische und potentielle Energie sowie die nicht-konservativen Kräfte in Abhängigkeit der Koordinate φ durch

$$E_{\text{pot}} = c\,l^2 \cos(\varphi)\,\sin(\varphi) + c\,l^2\,[\sin(\varphi)]^2$$

$$E_{\text{kin}} = 2\,m\,l^2\,\dot{\varphi}^2$$

$$Q_D = -2\,l^2\,d\,\dot{\varphi}$$

$$Q_F = F(t)\;l$$

vorgegeben.
Bestimmen Sie die linearisierte Form der Bewegungsgleichung für kleine Auslenkungen um die Ausgangslage ($\varphi = 0$). **(3,0 Punkte)**

$$4\,m\,l^2\ddot{\varphi} + 2\,d\,l^2\dot{\varphi} + 2\,c\,l^2\varphi = F(t)\;l - c\,l^2$$

$$\Leftrightarrow\; \ddot{\varphi} + \frac{d}{2\,m}\dot{\varphi} + \frac{c}{2\,m}\varphi = \frac{F(t)}{4\,m\,l} - \frac{c}{4m}$$

Geben Sie für die um die Ausgangslage linearisierte Bewegungsgleichung den Lehrschen Dämpfungsgrad D an. **(1,0 Punkte)**

$$D = \frac{\delta}{\omega} = \frac{\frac{d}{4\,m}}{\sqrt{\frac{c}{2\,m}}} = \frac{\sqrt{2}}{4}\,\frac{d}{\sqrt{c\,m}} = \frac{1}{2\,\sqrt{2}}\,\frac{d}{\sqrt{c\,m}}$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

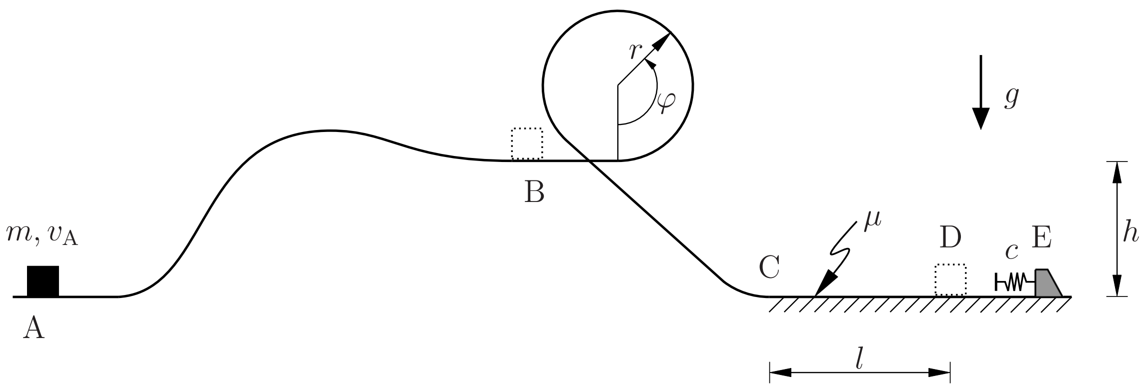
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 2 (Seite 1 von 2)

Eine punktförmige Masse m weist im Punkt A die Geschwindigkeit v_A auf. Die Bahn, zu welcher der Körper stets Kontakt besitzt, ist zwischen den Punkten A und C reibungsfrei, der Bereich zwischen den Punkten C und E reibungsbehaftet (Gleitreibungskoeffizient μ). Die Masse befindet sich im Schwerefeld (Beschleunigung g) und hält stets Kontakt zur Bahn. Übergänge zwischen einem ebenen und einem gekrümmtem Bahnabschnitt verlaufen stets tangential.



a)
Bestimmen Sie die Geschwindigkeit v_B der Masse im Punkt B. **(2,0 Punkte)**

$$v_\text{B} = \sqrt{{v_A}^2 - 2gh}$$

b)
Bestimmen Sie die Geschwindigkeit $v\,(\varphi)$ der Masse innerhalb des Loopings. **(2,0 Punkte)**

$$v\,(\varphi) = \sqrt{{v_B}^2 + 2gr(\cos(\varphi) - 1)} \text{ oder } v\,(\varphi) = \sqrt{{v_A}^2 + 2gr\cos(\varphi) - 2g(h + r)}$$

Wie groß muss die Geschwindigkeit v_B der Masse im Punkt B sein, damit diese im Looping den Kontakt zur Bahn nicht verliert? **(2,0 Punkte)**

$$v_\text{B} \geq \sqrt{5\,g\,r} \qquad \left(\text{aus} \quad v_\text{B} \geq \sqrt{gr(2 - 3\cos(\varphi_\text{krit}))} \quad \text{mit} \quad \varphi_\text{krit} = \pi\right)$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 2 (Seite 2 von 2)

c)
Bestimmen Sie die Strecke l abhängig von der Anfangsgeschwindigkeit v_A, welche die Masse nach Passieren des Punktes C zurücklegt, bevor sie zum Stillstand kommt. Nehmen Sie dabei zunächst an, dass die Masse zum Stillstand kommt, bevor sie den Prellbock im Punkt E erreicht. **(2,0 Punkte)**

$l\,(v_\mathrm{A}) = \frac{{v_A}^2}{2g\mu}$

d)
Nehmen Sie nun an, dass die Reibung vernachlässigbar klein ist ($\mu = 0$). Bestimmen Sie die maximale Federstauchung Δl (Federsteifigkeit c) im Prellbock. Dabei befindet sich die Feder anfangs im ungespannten Zustand. **(2,0 Punkte)**

$\Delta l\,(v_\mathrm{A}) = v_A\sqrt{\frac{m}{c}}$

TU Dortmund

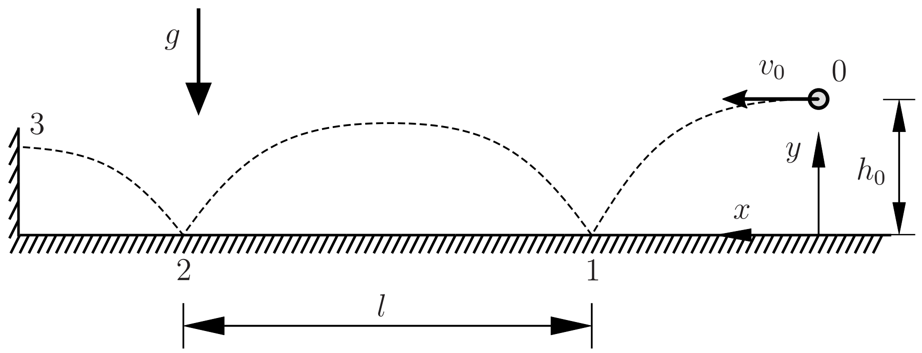
Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ________________

Nachname: ________________

Matr.-Nr.: ________________

Aufgabe 3 (Seite 1 von 3)



a)

Ein als Massepunkt anzunehmender Ball wird wie oben skizziert horizontal mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 aus der Höhe h_0 geworfen. Er prallt in den Punkten 1 und 2 vom Boden ab, um anschließend in Punkt 3 horizontal auf eine Wand zu stoßen. Dabei wurde die Länge l zwischen den Punkten 1 und 2 gemessen. Die Stoßzahl zwischen dem Boden und dem Ball sei zunächst allgemein $e \in (0, 1]$. Es wirkt die Erdbeschleunigung g.

Bestimmen Sie die Zeitdifferenzen Δt_{01}, Δt_{12} und Δt_{23} die der Ball zwischen den Punkten benötigt. **(1,5 Punkte)**

$$\Delta t_{01} = \sqrt{\frac{2\,h_0}{g}} \qquad \Delta t_{12} = 2\,e\sqrt{\frac{2\,h_0}{g}} \qquad \Delta t_{23} = e^2\sqrt{\frac{2\,h_0}{g}}$$

oder

$$\Delta t_{01} = \sqrt{\frac{2\,h_0}{g}} \qquad \Delta t_{12} = \frac{l}{v_0} \qquad \Delta t_{23} = \frac{e\,l}{2\,v_0}$$

Geben Sie die Koordinaten des Ortsvektors $\boldsymbol{r}_3 = x_3\,\boldsymbol{e}_x + y_3\,\boldsymbol{e}_y$ von Punkt 3 bezüglich des gegebenen Koordinatensystems an. **(2,0 Punkte)**

$$\boldsymbol{r}_3 = v_0\sqrt{\frac{2\,h_0}{g}}\,[1 + 2\,e + e^2]\;\boldsymbol{e}_x + e^4\,h_0\,\boldsymbol{e}_y$$

oder

$$\boldsymbol{r}_3 = v_0\,[\Delta t_{01} + \Delta t_{12} + \Delta t_{23}]\;\boldsymbol{e}_x + \frac{g}{2}\,[\Delta t_{23}]^2\;\boldsymbol{e}_y$$

Bestimmen Sie die Stoßzahl e. **(2,0 Punkte)**

$$e = \frac{l}{2\,v_0}\sqrt{\frac{g}{2\,h_0}}$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

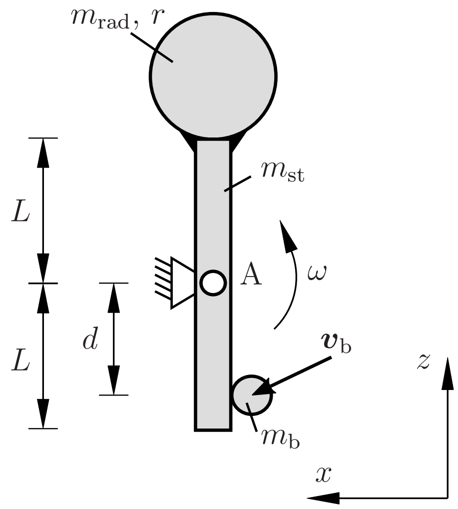
Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 3 (Seite 2 von 3)

b)

Nebenstehend ist ein in A drehbar gelagerter Rotor abgebildet. Er besteht aus einem Stab der Masse $m_{\mathrm{st}} = 3\,m$ mit der Länge $2\,L$ und einem am Stab angeschweißten Rad der Masse $m_{\mathrm{rad}} = m$ mit Radius r. Die Oberfläche des Rotors ist ideal glatt.



Bestimmen Sie das Massenträgheitsmoment Θ^{A} des Rotors bezogen auf den Drehpunkt A.

(1,0 Punkte)

$$\Theta^{\mathrm{A}} = m\,L^2 + \tfrac{1}{2}\,m\,r^2 + m\,[L+r]^2 = 2\,m\,L^2 + 2\,m\,L\,r + \tfrac{3}{2}\,m\,r^2$$

c)

Der Ball der Masse m_{b} prallt nun mit der Exzentrizität d auf den Rotor. Unmittelbar vor dem Stoß weist der Ball die bekannte Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}_{\mathrm{b}} = v_{\mathrm{b}_x}\,\boldsymbol{e}_x + v_{\mathrm{b}_z}\,\boldsymbol{e}_z$ auf, während sich der Rotor zunächst in Ruhe befindet.

Gesucht sind die Winkelgeschwindigkeit $\bar{\omega}$ des Rotors sowie die Komponenten der Geschwindigkeit $\bar{\boldsymbol{v}}_b = \bar{v}_{\mathrm{b}_x}\,\boldsymbol{e}_x + \bar{v}_{\mathrm{b}_z}\,\boldsymbol{e}_z$ des Balls unmittelbar nach dem Stoß. Geben Sie auf der folgenden Seite **alle** Gleichungen an, welche zur eindeutigen Bestimmung der gesuchten Größen notwendig sind. Gehen Sie dabei von einem vollkommen elastischen Stoß aus und setzen Sie Θ^{A} als bekannt voraus.

Hinweis: Die Gleichungen müssen **nicht** gelöst werden. **(3,5 Punkte)**

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 3 (Seite 3 von 3)

Gesamt(dreh)impulsänderungen

$$-d\,\hat{F} = \Theta^{\mathrm{A}}\,[\bar{\omega} - \omega] \qquad \text{mit}\,\omega = 0 \quad \text{(Ruhelage)} \tag{1}$$

$$-\hat{F} = m_{\mathrm{b}}\,[\bar{v}_{\mathrm{b}_x} - v_{\mathrm{b}_x}] \tag{2}$$

$$e = 1 = -\frac{\bar{v}_{\mathrm{b}_x} + \bar{\omega}\,d}{v_{\mathrm{b}_x}} \qquad \text{(vollkommen elastischer Stoß)} \tag{3}$$

$$\bar{v}_{\mathrm{b}_z} = v_{\mathrm{b}_z} \qquad \text{(Glatter Stoß: Kein Kraftstoß in Stoßebene.)} \tag{4}$$

Unbekannte : $\hat{F},\ \underline{\bar{v}_{\mathrm{b}_x},\ \bar{v}_{\mathrm{b}_z},\ \bar{\omega}}$

Oder

Unterteilung in Kompressions- und Restitutionsphase

$$-d\,\hat{F}_{\mathrm{K}} = \Theta^{\mathrm{A}}\,[\omega^* - \omega] \qquad \text{mit}\,\omega = 0 \quad \text{(Ruhelage)} \tag{1}$$

$$-\hat{F}_{\mathrm{K}} = m_{\mathrm{b}}\,[v_x^* - v_{\mathrm{b}_x}] \tag{2}$$

$$-d\,\hat{F}_{\mathrm{R}} = \Theta^{\mathrm{A}}\,[\bar{\omega} - \omega^*] \tag{3}$$

$$-\hat{F}_{\mathrm{R}} = m_{\mathrm{b}}\,[\bar{v}_{\mathrm{b}_x} - v_x^*] \tag{4}$$

$$-d\,\omega^* = v_x^* \qquad \text{(Kinematische Bindung)} \tag{5}$$

$$e = 1 = \frac{F_{\mathrm{R}}}{F_{\mathrm{K}}} \qquad \text{(vollkommen elastischer Stoß)} \tag{6}$$

$$\bar{v}_{\mathrm{b}_z} = v_{\mathrm{b}_z} \qquad \text{(Glatter Stoß: Kein Kraftstoß in Stoßebene.)} \tag{7}$$

Unbekannte : $\hat{F}_{\mathrm{K}},\ \hat{F}_{\mathrm{R}},\ v_x^*,\ \omega^*,\ \underline{\bar{v}_{\mathrm{b}_x},\ \bar{v}_{\mathrm{b}_z},\ \bar{\omega}}$