TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

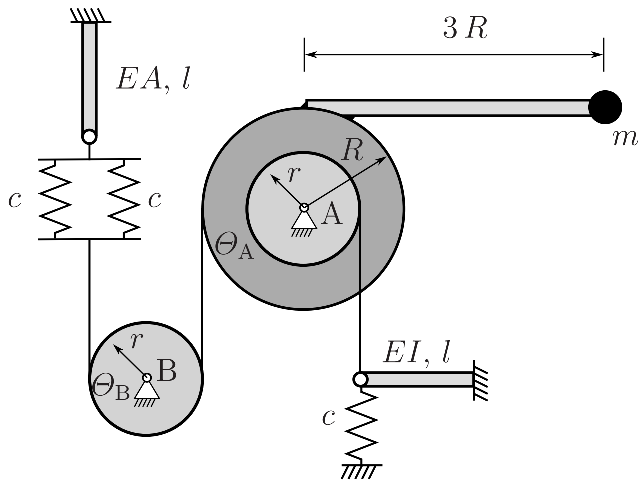
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 1 (Seite 1 von 3)

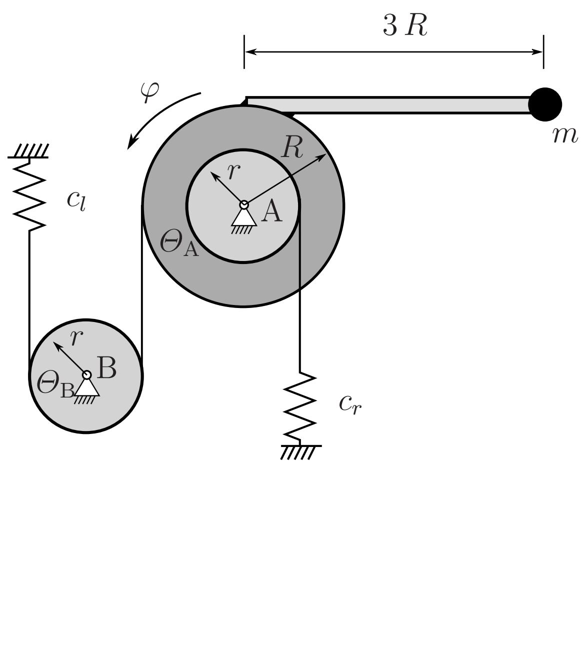
a)
Das nebenstehende System besteht aus einer im Punkt A drehbar gelagerten Stufenrolle (Radien r und R) sowie einer in Punkt B drehbar gelagerten Umlenkrolle (Radius r). Die jeweiligen Massenträgheitsmomente dieser Rollen bzgl. des jeweiligen Mittelpunktes sind durch Θ_A bzw. Θ_B gegeben. Zusätzlich ist eine Punktmasse (Masse m) über einen als masselos anzusehenden Balken starr mit der Stufenrolle verbunden. Die als dehnstarr anzunehmenden Seile werden schlupffrei auf die Rollen ab- bzw. aufgerollt und sind mit zusammengesetzten elastischen Strukturen (Balken, Stäbe und Federn) verbunden.



Berechnen Sie die Ersatzfedersteifigkeiten für die zusammengesetzten elastischen Strukturen, die am linken (c_l) und am rechten (c_r) Seil befestigt sind. **(2,0 Punkte)**

$$c_l = \left[\frac{1}{2\,c} + \frac{l}{EA}\right]^{-1} = \frac{2cEA}{EA + 2cl} \qquad c_r = c + \frac{3EI}{l^3}$$

b)
Das nebenstehende System aus Aufgabenteil a) wurde dahingehend modifiziert, dass die links und rechts an Seilen befestigten Elemente durch einzelne Federn ersetzt wurden (Federsteifigkeiten c_l, c_r). Die Federn sind in der dargestellten Lage um $\Delta l_l > 0$ (links) bzw. $\Delta l_r > 0$ (rechts) vorgespannt.



TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 1 (Seite 2 von 3)

Geben Sie die kinetische Energie E_{kin} und potentielle Energie E_{pot} des Systems als Funktion des Freiheitsgrades φ an. **(3,5 Punkte)**
Hinweis: Fassen Sie die einzelnen Terme nicht zusammen.

$$E_{\text{kin}} = \tfrac{1}{2}\,\Theta_A\,\dot{\varphi}^2 + \tfrac{1}{2}\,\Theta_B\,\left[\tfrac{R}{r}\,\dot{\varphi}\right]^2 + \tfrac{1}{2}\,m\,[10\,R^2]\,\dot{\varphi}^2$$

$$E_{\text{pot}} = \tfrac{1}{2}\,c_r\,[\varphi\,r + \Delta l_r]^2 + \tfrac{1}{2}\,c_l\,[\Delta l_l - \varphi R]^2$$

Stellen Sie die Bewegungsgleichung des Systems bezüglich des Freiheitsgrades φ auf. **(2,0 Punkte)**

$$0 = -c_r\,[\varphi\,r + \Delta l_r]\,r - c_l\,[\Delta l_l - \varphi\,R]\,[-R] - \Theta_A\,\ddot{\varphi} - \Theta_B\,\ddot{\varphi}\,\left[\tfrac{R}{r}\right]^2 - 10\,m\,R^2\,\ddot{\varphi}$$

bzw.

$$\ddot{\varphi}\,\left[\Theta_A + \Theta_B\tfrac{R^2}{r^2} + 10\,m\,R^2\right] + \varphi\,[c_r\,r^2 + c_l\,R^2] = -c_r\,r\,\Delta l_r + c_l\,R\,\Delta l_l$$

Geben Sie die Eigenkreisfrequenz ω_0 des Systems an. **(1,0 Punkte)**

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c_r\,r^2 + c_l\,R^2}{\Theta_A + \Theta_B\dfrac{R^2}{r^2} + 10\,m\,R^2}}$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

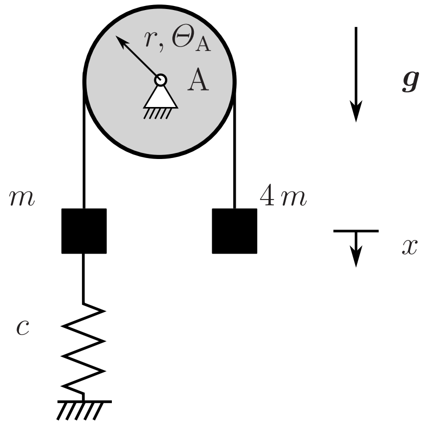
Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 1 (Seite 3 von 3)

c)
Das nebenstehende System besteht aus einer in Punkt A drehbar gelagerten Rolle (Radius r, Massenträgheitsmoment Θ_{A} bezüglich des Punktes A) sowie aus zwei Punktmassen (Masse m bzw. $4\,m$). In der dargestellten Lage ist die Feder ungespannt.
Für eine spezielle Wahl der Anfangsbedingungen ergibt sich die Lösung des Schwingungsproblems zu

$$x\,(t) = -\mathcal{A}\cos\,(\omega\,t) + \mathcal{A}$$

wobei $\mathcal{A}$ und ω im Folgenden als vorgegebene Größen angesehen werden können.



Geben Sie die Lösung $\bar{x}\,(t)$ dieses Schwingungsproblems an, wobei $\bar{x} = 0$ die statische Ruhelage beschreibt. **(1,5 Punkte)**

$$\bar{x}\,(t) = -\mathcal{A}\cos\,(\omega\,t)$$

oder

$$\bar{x}\,(t) = -\mathcal{A}\cos\,(\omega\,t) + \mathcal{A} - \frac{3\,m\,g}{c}$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

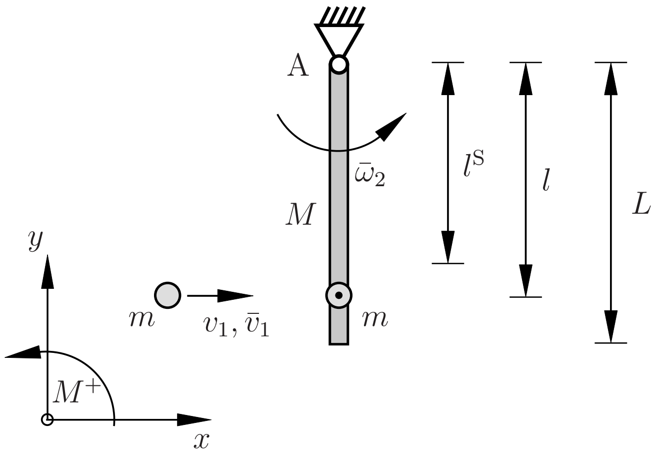
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 2 (Seite 1 von 4)

Wie nebenstehend gezeigt bewegt sich eine Punktmasse (Masse m) mit der konstanten Geschwindigkeit v_1 auf den in Punkt A gelagerten und zunächst in Ruhe befindlichen Stab (Masse $M = 5\,m$, Länge L) zu. Im Kontaktpunkt an der Stelle l ist zusätzlich eine Punktmasse (Masse m) fest mit dem Stab verbunden.



a)
Berechnen Sie das Massenträgheitsmoment Θ^{A} des Stabes mit der aufgeschweißten Punktmasse bezüglich des Punktes A. (**1,0 Punkte**)

$\Theta^{\mathrm{A}} = m(\frac{5}{3}L^2 + l^2)$

Geben Sie nun die Lage des Schwerpunktes l^{S} des Stabes mit der aufgeschweißten Punktmasse in Abhängigkeit von l, L und m an. (**1,0 Punkte**)

$l^{\mathrm{S}} = \frac{\frac{5}{2}L+l}{6}$

b)

Geben Sie auf der nächsten Seite sämtliche zur Lösung des teilelastischen Stoßproblems (Stoßziffer e) notwendigen Gleichungen an. Nehmen Sie ferner das Massenträgheitsmoment Θ^{A} als bekannte Größe an. Darüber hinaus sollen die oben eingezeichneten Geschwindigkeitsrichtungen angenommen werden. (**3,0 Punkte**)

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 2 (Seite 2 von 4)

1. Möglichkeit

$\Theta^A(\bar{\omega}_2 - 0) = l\hat{F}$
$m(\bar{v}_1 - v_1) = -\hat{F}$
$e = \frac{\bar{\omega}_2 l - \bar{v}_1}{v_1}$

$3\ Gleichungen$
$3\ Unbekannte: \bar{\omega}_2, \bar{v}_1, \hat{F}$

2. Möglichkeit

$\Theta^A(\omega^* - 0) = l\hat{F}_K$
$m(v^* - v_1) = -\bar{F}_K$
$\Theta^A(\bar{\omega}_2 - \omega^*) = l\hat{F}_R$
$m(\bar{v}_1 - v^*) = \hat{F}_R$

$\omega^* l = v^*$
$\hat{F}_R = e\hat{F}_K$

$6\ Gleichungen$
$6\ Unbekannte: \omega^*, v^*, \bar{\omega}_2, \bar{v}_1, \hat{F}_K, \hat{F}_R$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

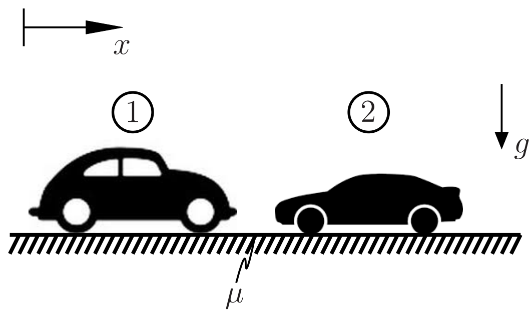
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 2 (Seite 3 von 4)

Fahrzeug 1 (Masse m_1) und Fahrzeug 2 (Masse m_2) fahren aufeinander zu und stoßen frontal zusammen. Laut Zeugenaussagen ist der Fahrer des Fahrzeugs 1 vor dem Zusammenstoß mit einer Geschwindigkeit v_1 gefahren, während dieses Fahrzeug nach dem Stoß zurückgeprallt ist und rutschend die Strecke s_1 zurücklegte. Fahrzeug 2 rutschte nach dem Zusammenprall um die Strecke s_2 weiter. Die Oberflächenbeschaffenheit der Straße in Verbindung mit dem Material sämtlicher Reifen kann durch den Gleitreibungskoeffizienten μ beschrieben werden.



c)
Geben Sie die Geschwindigkeit $\bar{v}_1$ des Fahrzeugs 1 nach dem Zusammenstoß in Abhängigkeit von s_1, μ und m_1 an. **(1,5 Punkte)**

$\bar{v}_1 = -\sqrt{2\mu g s_1}$

d)
Auf ähnliche Weise wurde die Geschwindigkeit $\bar{v}_2$ ermittelt, sodass Sie nun v_1, $\bar{v}_1$ sowie auch $\bar{v}_2$ als bekannt voraussetzen können. Geben Sie nun die Geschwindigkeit v_2 des Fahrzeugs 2 vor dem Zusammenstoß in Abhängigkeit der bekannten Größen an. **(1,0 Punkte)**

$v_2 = \frac{m_1}{m_2}(\bar{v}_1 - v_1) + \bar{v}_2$

e)
Wie groß müsste die Stoßzahl e sein, sodass die kinetische Energie nach dem Stoß maximal wird. **(1,0 Punkte)**

$e = 1$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 2 (Seite 4 von 4)

f)
Für eine Unfallanalyse-Datenbank wurde der Frontalzusammenstoß (siehe S. 3) zur Ermittlung der Stoßzahl e nachgestellt. Der Messwert der Geschwindigkeit v_1 des Fahrzeugs 1 vor dem Zusammenstoß ist dabei verloren gegangen. Berechnen Sie die Geschwindigkeit v_1 sowie die Stoßzahl e in Abhängigkeit der bekannten Größen v_2, $\bar{v}_1$ und $\bar{v}_2$. (**1,5 Punkte**)

$v_1 = \frac{m_2}{m_1}(\bar{v}_2 - v_2) + \bar{v}_1$

$e = -\frac{\bar{v}_1 - \bar{v}_2}{\frac{m_2}{m_1}(\bar{v}_2 - v_2) + \bar{v}_1 - v_2}$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

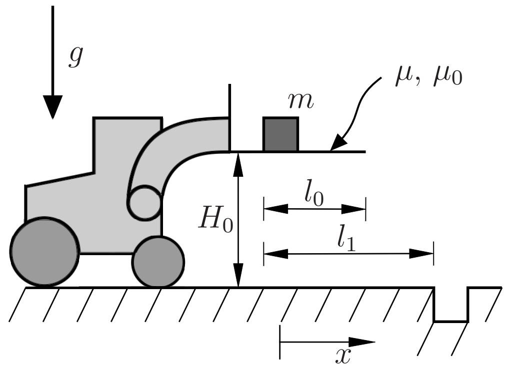
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 3 (Seite 1 von 2)

Zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ bremst der bis dahin mit der konstanten Geschwindigkeit v_0 fahrende Radlader mit $a_\mathrm{F} = -a_0$, $(a_0 > 0)$, sodass die Ladung der Masse m auf der Schaufel gerade zu Rutschen beginnt. Der Abstand der Ladung bis zum Ende der Schaufel beträgt l_0, die Höhe der Ladung über der Erde H_0 und der Abstand zu einer Grube l_1. Die Interaktion der Oberflächen von Ladung und Schaufel kann durch die Reibkoeffizienten μ und μ_0 beschrieben werden.



a)
Bestimmen Sie die Absolutbeschleunigung der Ladung a_abs zum Zeitpunkt t_0 bezüglich des vorgegebenen Koordinatensystems. **(2,0 Punkte)**

$$a_\mathrm{abs} = -\mu\, g$$

Bestimmen Sie die Geschwindigkeit v_rel der Ladung relativ zu der des Radladers als Funktion der Zeit im Intervall $t_0 \leq t \leq t^*$, wobei die Ladung bei t^* von der Schaufel fällt. **(1,5 Punkte)**

$$v_\mathrm{rel} = [-a_\mathrm{F} - \mu\, g]\, t = [a_0 - \mu\, g]\, t$$

b)
Im Folgenden sei $v_\mathrm{rel} = a_\mathrm{rel}\, t$, $(a_\mathrm{rel} > 0)$ bekannt. Bestimmen Sie den Zeitpunkt t^*, an dem die Ladung von der Schaufel fällt. **(1,0 Punkte)**

$$t^* = \sqrt{\frac{2\, l_0}{a_\mathrm{rel}}}$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 3 (Seite 2 von 2)

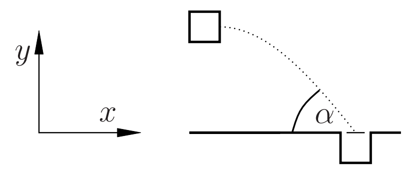
c)
Der absolut von der Ladung bis zu deren Herabfallen zurückgelegte Weg s^* und die entsprechende Absolutgeschwindigkeit der Ladung v^* zu diesem Zeitpunkt seien nun bekannt. Bestimmen Sie l_1 so, dass die Ladung genau über der Grube die Bodenhöhe erreicht. Geben Sie außerdem die Zeit t^{w} an, die vom Herabfallen bei t^* bis zum Erreichen der Bodenhöhe vergeht. Die Größe H_0 ist als gegeben vorauszusetzen.

(2,0 Punkte)

$l_1 = v^* \sqrt{\frac{2\,H_0}{g}} + s^*$ $\qquad$ $t^{\mathrm{w}} = \sqrt{\frac{2\,H_0}{g}}$

Bestimmen Sie die Komponenten der Aufschlaggeschwindigkeit $\boldsymbol{v}^{\mathrm{A}}$ beim Erreichen der Bodenhöhe sowie den Aufschlagwinkel α gemäß nebenstehender Zeichnung.

(2,0 Punkte)



$$\boldsymbol{v}^{\mathrm{A}} = v^* \, \boldsymbol{e}_x + -g\sqrt{\frac{2\,H_0}{g}} \, \boldsymbol{e}_y$$

$$\alpha = \arctan\left(\frac{v_{yA}}{v_{xA}}\right) = \arctan\left(\frac{g\,\sqrt{2\,H_0/g}}{v^*_{\mathrm{abs}}}\right)$$

d)
Bestimmen Sie die notwendige Beschleunigung a_{F}, sodass die Haftung der Ladung auf der Schaufel (Haftreibungskoeffizient μ_0) gerade überwunden wird.
Hinweis: Diese Beschleunigung wurde zu Beginn der Aufgabe als bekannt angenommen und soll nun näher spezifiziert werden.

(1,5 Punkte)

$a_{\mathrm{F}} = -\mu_0\, g \quad (\text{oder} <)$ $\qquad$ $(a_0 = \mu_0\, g \quad (\text{oder} >))$