TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

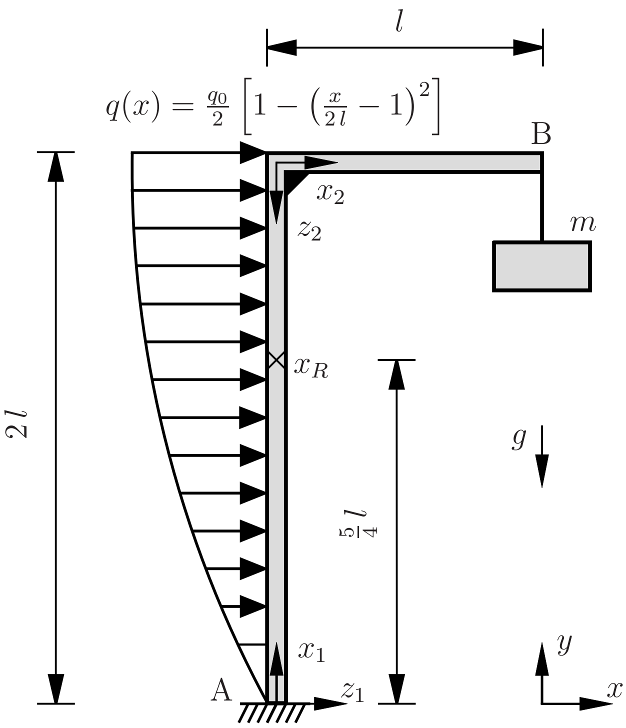
Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 1 (Seite 1 von 4)

Das nebenstehende System besteht aus einem dehnstarren Rahmen (Biegesteifigkeit EI), dessen Ecke als biegestarr anzunehmen ist. Der Rahmen ist als masselos zu betrachten. Das System ist in Punkt A fest eingespannt. Am Punkt B ist eine Masse m durch ein Seil mit dem Rahmen verbunden. Eine weitere Last ist durch eine quadratische Streckenlast $q(x) = \frac{q_0}{2}\left[1-\left(\frac{x}{2l}-1\right)^2\right]$ am vertikalen Abschnitt des Rahmens gegeben. Nehmen Sie an, dass für die aus der Masse resultierenden Kraft $mg = q_0\,l$ gilt.

Hinweis: Der Kraftangriffspunkt der resultierenden Streckenlast liegt bei $x_R = \frac{5}{4}\,l$ entlang der positiven x_1 Achse.



a)

Geben Sie die **dynamischen** Randbedingungen an den Punkten A und B an, die zur eindeutigen Bestimmung der Biegeline erforderlich sind. Dafür wurden die in positive x_1-z_1-Koordinatenrichtung angenommenen Lagerreaktionen in Punkt A bereits zu $A_{x_1} = q_0\,l$, $A_{z_1} = -\frac{2}{3}\,q_0\,l$ und $M_A = \frac{11}{6}\,q_0\,l^2$ bestimmt. **(2,0 Punkte)**

$Q(x_1 = 0) = -A_{z_1} = \frac{2}{3}q_0 l$

$M(x_1 = 0) = -M^{\mathrm{A}} = -\frac{11}{6}q_0\,l^2$

$Q(x_2 = l) = q_0\,l$

$M(x_2 = l) = 0$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Geben Sie nun alle **kinematischen** Rand- und Übergangsbedingungen an, die zur eindeutigen Bestimmung der Biegelinien $w_i(x_i)$ erforderlich sind. Kennzeichnen Sie die Bereiche eindeutig mit den entsprechenden Indizes. **(2,0 Punkte)**

$w_1(x_1 = 0) = 0$ & $w_1'(x_1 = 0) = 0$
$w_2(x_2 = 0) = 0$ & $w_2'(x_2 = 0) = w_1'(x_1 = 2l)$

Berechnen Sie die Funktion der Biegelinie $w_2(x_2)$ des Rahmens im zweiten Abschnitt $0 \leq x_2 \leq l$ **ohne** die dabei auftretenden Konstanten näher zu spezifizieren. Geben Sie dazu nachfolgend die wichtigsten Zwischenschritte sowie das endgültige Ergebnis an. Es ist darauf zu achten, dass der Lösungsweg schlüssig und vollständig dargestellt wird. **(2,0 Punkte)**

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 1 (Seite 3 von 4)

Lösung zu Aufgabenteil a):

$M(x_2) = -q_0\, l(l - x_2)$
$\Rightarrow w'(x_2) = \frac{1}{EI}\left[-\frac{q_0\, l}{2} x_2^2 + q_0\, l^2\, x_2 + C_1\right]$
$\Rightarrow w(x_2) = \frac{1}{EI}\left[-\frac{q_0\, l}{6} x_2^3 + \frac{q_0\, l^2}{2} x_2^2 + C_1\, x_2 + C_2\right]$
Alternativ: $q(x_2) = 0 \Rightarrow Q(x_2) = C_1 \Rightarrow M(x_2) = C_1\, x_2 + C_2$
$\Rightarrow w'(x_2) = -\frac{1}{EI}\left[\frac{1}{2} C_1\, x_2^2 + C_2\, x_2 + C_3\right]$
$w(x_2) = -\frac{1}{EI}\left[\frac{1}{6} C_1\, x_2^3 + \frac{1}{2} C_2\, x_2^2 + C_3\, x_2 + C_4\right]$

Bestimmen Sie die Verschiebung $\boldsymbol{u}^m = u_x^m\, \boldsymbol{e}_x + u_y^m\, \boldsymbol{e}_y$, welche die Masse m erfährt. Nutzen Sie dafür das vorgegebene, globale x-y-Koordinatensystem. Drücken Sie die Verschiebung in Abhängigkeit der Biegelinien $w_1(x_1)$ und $w_2(x_2)$ aus, welche als bekannt anzunehmen sind. **(1,5 Punkte)**

$u_x^m = w_1(x_1 = 2l)$

$u_y^m = -w_2(x_2 = l)$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

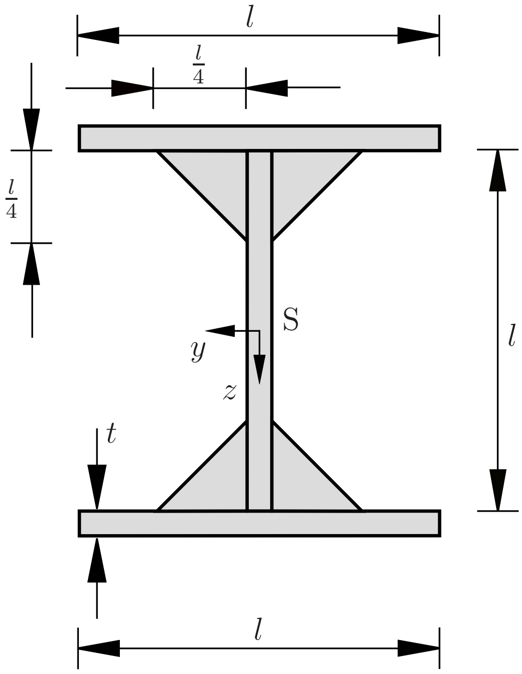
Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 1 (Seite 4 von 4)

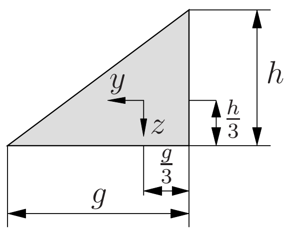
b)

Gegeben ist die Geometrie eines dünnwandigen Doppel-T-Trägers, welcher durch vier identische, rechtwinklige Dreiecke verstärkt wurde. Der Träger besitzt eine konstante Profildicke $t \ll l$. Die weiteren Abmessungen sind der Zeichnung zu entnehmen.



Hinweis: Die Flächenträgheitsmomente für ein rechtwinkliges Dreieck mit Katheten g und h und der y-Achse parallel zur Grundseite g sind:

$$I_y = \frac{g\,h^3}{36}\,, \qquad I_z = \frac{h\,g^3}{36}\,, \qquad I_{yz} = -\frac{g^2\,h^2}{72}\,.$$



Bestimmen Sie das Flächenträgheitsmoment I_y des I-Trägers bezüglich des gegebenen y-z-Schwerpunktkoordinatensystems in Abhängigkeit von l und t. Fassen Sie die Terme nicht zusammen. **(2,5 Punkte)**

$$I_y = \frac{tl^3}{12} + 2\left[\frac{lt^3}{12} + \left[\frac{l}{2} + \frac{t}{2}\right]^2 lt\right] + 4\left[\frac{\left(\frac{l}{4}\right)^4}{36} + \left(\frac{l}{2} - \frac{1}{3}\frac{l}{4}\right)^2 \frac{1}{2}\frac{l}{4}\frac{l}{4}\right]$$

$$t \ll l \Rightarrow I_y = \frac{tl^3}{12} + 2\left[\frac{l^3\,t}{12}\right] + 4\left[\frac{\left(\frac{l}{4}\right)^4}{36} + \left(\frac{l}{2} - \frac{1}{3}\frac{l}{4}\right)^2 \frac{1}{2}\frac{l}{4}\frac{l}{4}\right]$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

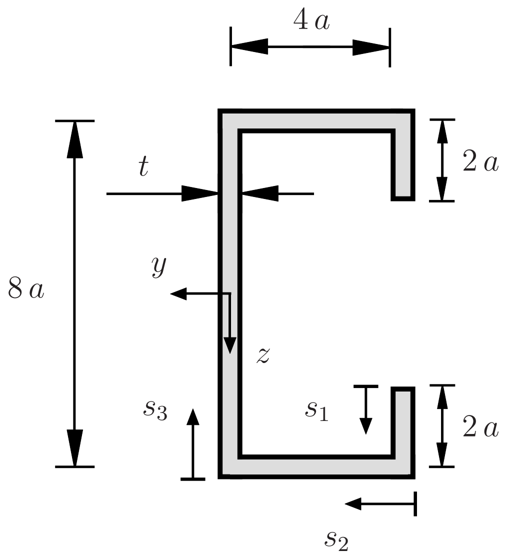
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 2 (Seite 1 von 5)

In dem unten dargestellten dünnwandigem Profil ($t \ll a$) sei die Querkraft Q_z im Schubmittelpunkt in z-Richtung wirksam.



a)
Berechnen Sie die statischen Momente $S_{\mathrm{I}}(s_1)$ und $S_{\mathrm{II}}(s_2)$ des Profils. **(2,0 Punkte)**

$$S_{\mathrm{I}}(s_1) = t\, s_1 \left(\frac{s_1}{2} + 2\,a\right)$$

$$S_{\mathrm{II}}(s_2) = S_{\mathrm{I}}\,(s_1 = 2\,a) + t\, s_2\, 4\,a$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

b)
Leiten Sie eine Bedingung für die Querkraft Q_z her, sodass die zulässige Schubspannung τ_{zul}, welche aus der Querkraft Q_z folgt, nicht überschritten wird. Sie brauchen das Flächenträgheitsmoment sowie das statische Moment dabei **nicht** explizit einzusetzen, sondern lediglich die Stelle der Auswertung in der Form $S_{\text{i}}(s_{\text{i}} = \bullet)$ anzugeben. **(1,0 Punkte)**

$$Q_z \leq \frac{\tau_{\text{zul}}\, t\, I_y}{S_{\text{III}}\,(s_3 = 4\,a)}$$

c)
Nennen Sie zwei Maßnahmen um die zulässige Querkraft zu erhöhen. Dabei muss die Höhe des Profils gleich bleiben. **(1,0 Punkte)**

Zum Beispiel t oder τ_{zul} erhöhen.

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

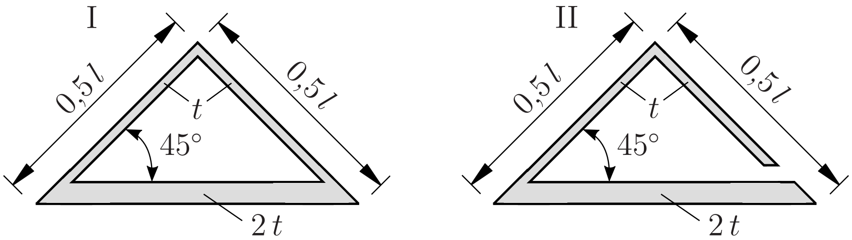
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 2 (Seite 3 von 5)

Nachfolgend sollen nun die zwei dargestellten dünnwandigen Profile ($t \ll l$) hinsichtlich Torsionsbelastungen untersucht werden. Das Profil I ist durchgehend, während das Profil II geschlitzt ist.



d)
Berechnen Sie für beide Profile das Torsionswiderstandsmoment. **(2,0 Punkte)**

$$W_\mathrm{T}^\mathrm{I} = \frac{1}{4}\, l^2\, t$$

$$W_\mathrm{T}^\mathrm{II} = \frac{1}{2}\, \frac{1 + 4\sqrt{2}}{3}\, l\, t^2$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

e)
Im Folgenden werden nun zwei voneinander unabhängige Balken mit einer Länge von $10\,l$ betrachtet, welche mit einem konstanten Torsionsmoment belastet werden. Der erste Balken hat dabei den oben dargestellten Profilquerschnitt I und der zweite Balken den Profilquerschnitt II. Berechnen Sie die nötigen Torsionsmomente M_T^I und M_T^II, wenn die Balkenenden jeweils um 3,6° gegeneinander verdreht werden. Der Schubmodul G beider Profile sei bekannt. **(2,5 Punkte)**

$$M_\mathrm{T}^\mathrm{I} = \frac{1}{4}\,\frac{\pi}{500\,\left(4+\sqrt{2}\right)}\,t\,l^2\,G$$

$$M_\mathrm{T}^\mathrm{II} = \frac{1}{2}\,\frac{\pi\,\left(2+8\,\sqrt{2}\right)}{1500}\,t^3\,G$$

TU Dortmund

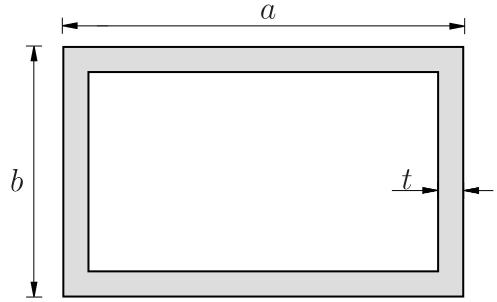
Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Sie sollen nun einen rechteckigen Profilquerschnitt auslegen.



f)
Wie müssen Sie die Kantenlängen a und b wählen, wenn der Umfang des Profils $4\,l$ betragen und das Torsionswiderstandsmoment maximal sein soll? Wie sieht der Einfluss der Kantenlängen auf das Torsionswiderstandsmoment aus, wenn das Profil geschlitzt ist? Begründen Sie Ihre Antworten. Berechnungen sind hierbei nicht notwendig. (**1,5 Punkte**)

Für das geschlossene Profil: $a = b = l$,
da die eingeschlossene Fläche maximiert werden muss.

Für das offene Profil: Kantenlängen können beliebig gewählt werden,
da nur der Umfang entscheidend ist.

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

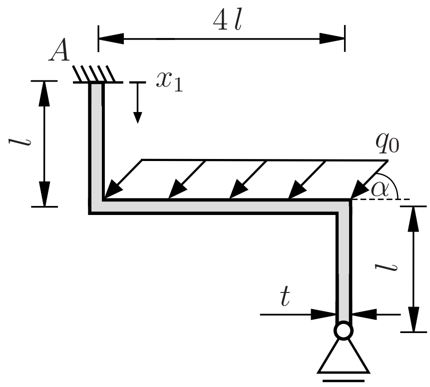
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 3 (Seite 1 von 6)

a)
Das nebenstehende, statisch unbestimmte Rahmensystem (Biegesteifigkeit EI, Dehnsteifigkeit EA) ist durch eine konstante Streckenlast mit dem Betrag q_0 belastet. Die Streckenlast greift am horizontalen Rahmenabschnitt unter dem Winkel α an. Die Lagerung des Rahmens ist der Skizze zu entnehmen.



Zeichnen Sie das statisch bestimme Ersatzsystem, welches sich ergibt, wenn die feste Einspannung in A durch ein Festlager ersetzt wird. Geben Sie zudem die Kompatibilitätsbedingung an, welche sich im Lager A ergibt. Nutzen Sie dafür die vorgegebene Koordinate x_1 für den oberen Rahmenabschnitt. Die zugehörige Biegelinie sei mit $w(x_1)$ bezeichnet.
(1,0 Punkte)

Skizze: (System mit Festlager und Moment in A statt fester Einspannung)

Kompatibilitätsbedingung: $w'(x_1 = 0) = 0$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

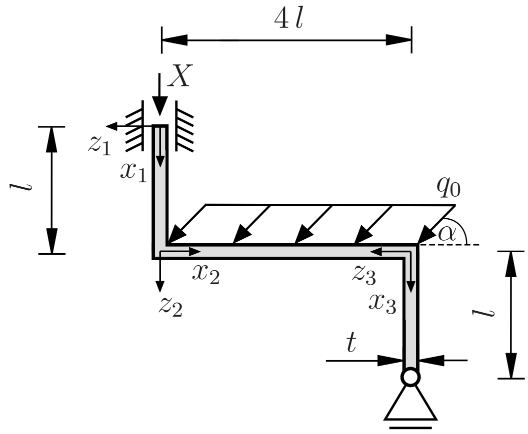
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 3 (Seite 2 von 6)

b)
Ein alternatives Ersatzsystem ist in der nebenstehenden Abbildung dargestellt. Dabei wurde die feste Einspannung in A durch eine Schiebehülse ersetzt und die statisch überzählige Kraft X eingeführt. Die Normalkraft- und Biegemomentenverläufe für die einzelnen Rahmenabschnitte sind im Folgenden gegeben. Beiträge aus Schubverformung sind in diesem Aufgabenteil zu vernachlässigen.



Die Funktionen der Normalkräfte und Biegemomente sind für dieses System wie folgt vorgegeben.

in Abhängigkeit von X für $q_0 = 0$:

$N_X(x_1) = -X$

$N_X(x_2) = 0$

$N_X(x_3) = -X$

$M_X(x_1) = 4\,X\,l$

$M_X(x_2) = [4\,l - x_2]\,X$

$M_X(x_3) = 0$

in Abhängigkeit von q_0 für $X = 0$:

$N_q(x_1) = 0$

$N_q(x_2) = [x_2 - 4\,l]\;q_0\,\cos(\alpha)$

$N_q(x_3) = -4\,q_0\,l\,\sin(\alpha)$

$M_q(x_1) = 4\,q_0\left[l\,\cos(\alpha)\,x_1 - l^2\,[\cos(\alpha) - 2\sin(\alpha)]\right]$

$M_q(x_2) = q_0\,\sin(\alpha)\left[8\,l^2 - \frac{x_2^2}{2}\right]$

$M_q(x_3) = 0$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

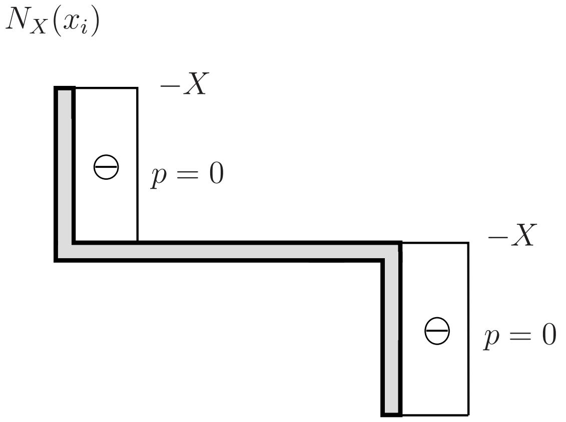
Vorname: ____________________

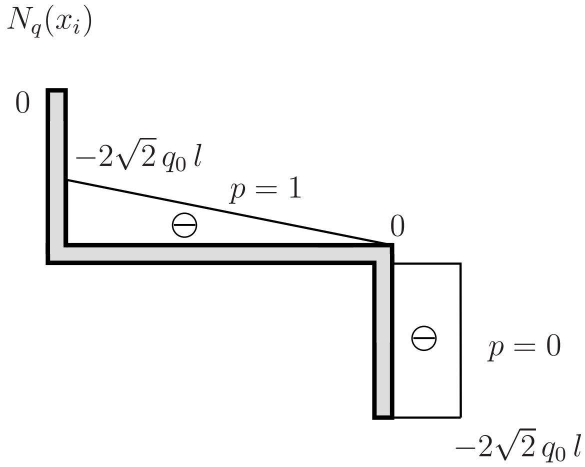
Nachname: ____________________

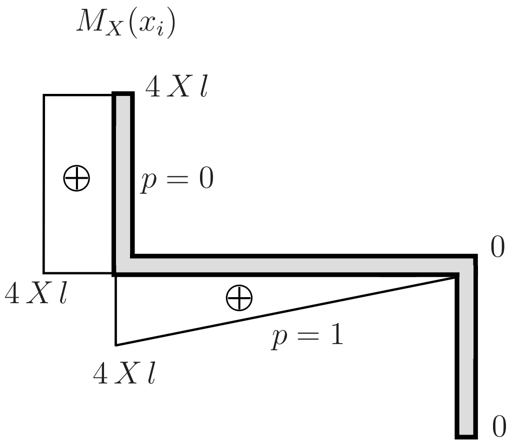
Matr.-Nr.: ____________________

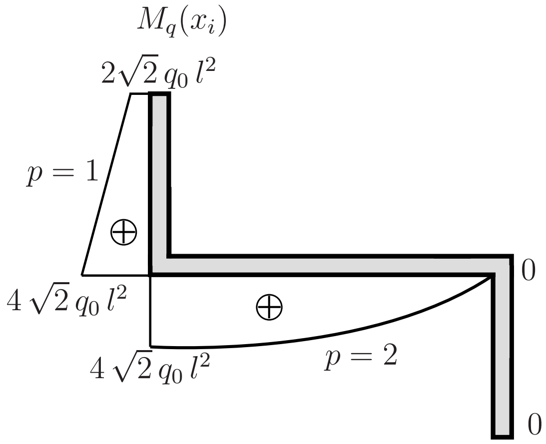
Aufgabe 3 (Seite 3 von 6)

Die grafische Darstellung der Verläufe ergibt sich für $\alpha = \pi/4$ zu









TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 3 (Seite 4 von 6)

Berechnen Sie die statisch überzählige Kraft X. Geben Sie dabei die wichtigsten Zwischenschritte sowie das endgültige Ergebnis an. Es ist darauf zu achten, dass der Lösungsweg schlüssig und vollständig dargestellt wird. Die Ergebnisse sollen **nicht** vereinfacht werden. **(4,5 Punkte)**

$X = -\frac{\alpha_{10}}{\alpha_{11}}$
mit

$$\alpha_{10} = \frac{1}{EA}\left[l \cdot (-1) \cdot \left(-2\sqrt{2}q_0 l\right)\right]$$
$$+\frac{1}{EI}\left[\frac{1}{2}l \cdot (4l) \cdot (2\sqrt{2}q_0 l^2 + 4\sqrt{2}q_0 l^2) + \frac{5}{12} \cdot (4l) \cdot (4l) \cdot (4\sqrt{2}q_0 l^2)\right]$$
$$\alpha_{11} = \frac{1}{EA}\left[2\left[l \cdot (-1) \cdot (-1)\right]\right] + \frac{1}{EI}\left[l \cdot (4l)^2 + \frac{1}{3} \cdot (4l) \cdot (4l)^2\right]$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 3 (Seite 5 von 6)

Bestimmen Sie den Momentenverlauf $M(x_2)$ des statisch unbestimmten Gesamtsystems im **zweiten** Rahmenabschnitt für $\alpha = \pi/4$. (**0,5 Punkte**)

$M(x_2) = q_0 \frac{\sqrt{2}}{2}\left[8\,l^2 - \frac{x_2^2}{2}\right] + X\,[4l - x_2]$

Nehmen Sie nun an, dass die statisch überzählige Kraft X bekannt ist und sich als

$$X = \frac{\mathcal{A}\sin(\alpha)}{EI + l^2 EA}$$

mit der Konstante $\mathcal{A} > 0$ schreiben lässt. Wie würde sich der Betrag des Moments $M(x_2 = 0)$ ändern, wenn der Winkel α im Bereich von $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ erhöht würde? Geben Sie eine kurze Begründung an. (**1,0 Punkte**)

$M(x_2 = 0) = q_0 \sin(\alpha)\,[8\,l^2] + \frac{\mathcal{A}\sin(\alpha)}{EI+l^2EA}\,[4l]$
d.h. der Winkel geht nur über den sinus und ausschließlich positiv ein. Da der sinus im angegebenen Bereich monoton steigt, wird das Moment $M(x_2)$ ebenfalls größer werden.

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

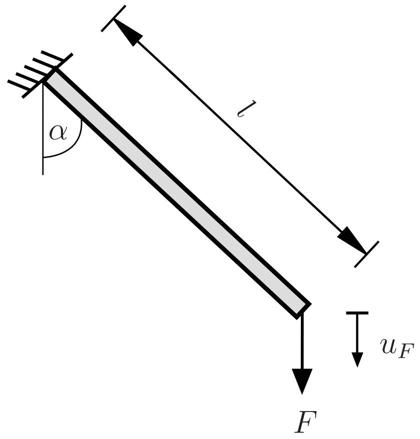
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 3 (Seite 6 von 6)

c)
Der dargestellte, dehnstarre Balken ($EA \to \infty$) der Länge l ist unter einem Winkel α fest eingespannt und weist die Biegesteifigkeit EI auf. An seinem freien Ende wird der Balken durch eine vertikale Einzelkraft F belastet.



Bestimmen Sie die im dargestellten System gespeicherte Formänderungsenergie Π in Abhängigkeit der gegebenen Größen. **(2,0 Punkte)**

$$\Pi = \frac{F^2 l^3 \sin^2(\alpha)}{6EI}$$

Bestimmen Sie den Betrag u_F, um welchen sich der Kraftangriffspunkt in Richtung der Einzelkraft verschiebt. **(1,0 Punkte)**

$$u_F = \frac{F l^3 \sin^2(\alpha)}{3EI}$$