TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

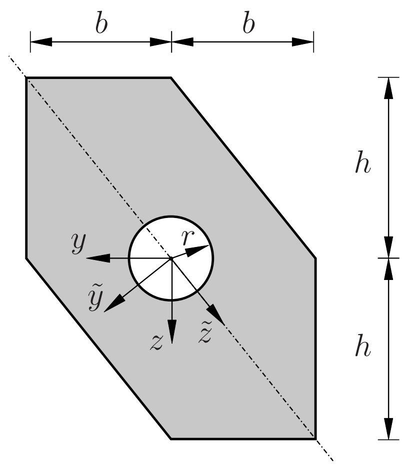
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 1 (Seite 1 von 3)

a)
Gegeben ist das dargestellte Profil mit Abmessungen b, h und einer kreisförmigen Bohrung mit Radius r.



Bestimmen Sie das Flächenträgheitsmoment I_y bezüglich des gegebenen y-z-Schwerpunktskoordinatensystems. Fassen Sie die einzelnen Terme **nicht** zusammen.

(**2,0 Punkte**)

$$I_y = \frac{2\,b\,[2\,h]^3}{12} - \frac{\pi}{4}\,r^4 - 2\left[\frac{b\,h^3}{36} + \frac{b\,h}{2}\left[\frac{2}{3}h\right]^3\right]$$

Welchen Wert nimmt das Deviationsmoment $I_{\tilde{y}\tilde{z}}$ bezüglich des gegebenen $\tilde{y}$-$\tilde{z}$-Schwerpunktskoordinatensystems **für $\mathbf{b} = \mathbf{h}$** an. Geben Sie eine eindeutige Begründung an.

(**0,5 Punkte**)

0, da $\tilde{y}$ und $\tilde{z}$ Symmetrieachsen des Körpers darstellen

Für einen nicht näher spezifizierten Querschnitt entnehmen Sie die Flächenträgheitsmomente $I_y = 1200\,\mathrm{mm}^4$, $I_z = -650\,\mathrm{mm}^4$ und $I_{yz} = 0\,\mathrm{mm}^4$ aus einem Tabellenwerk. Sind diese Werte physikalisch plausibel? Geben Sie eine eindeutige Begründung an.

(**0,5 Punkte**)

Nein, axiale Flächenträgheitsmomente können nicht negativ sein

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

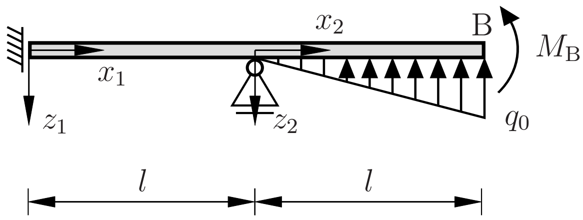
Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 1 (Seite 2 von 3)

b)

Der nebenstehend abgebildete Balken (Biegesteifigkeit EI) ist wie dargestellt gelagert und durch eine linear veränderliche Streckenlast (Maximalwert q_0) sowie ein Moment M_B belastet.



Geben Sie alle **kinematischen** Rand- und Übergangsbedingungen an, die zur Bestimmung der Biegelinien $w_i(x_i)$ des Gesamtsystems erforderlich sind. Kennzeichnen Sie die zugehörigen Bereiche eindeutig mit den entsprechenden Indizes. **(2,0 Punkte)**

$$w_1'(x_1 = 0) = 0$$
$$w_1(x_1 = l) = 0$$
$$w_2(x_2 = 0) = 0$$
$$w_1'(x_1 = l) = w_2'(x_2 = 0)$$

Geben Sie alle **dynamischen** Randbedingungen an der Stelle B bei $x_2 = l$ an. **(1,0 Punkte)**

$$Q_2(x_2 = l) = -EIw_2'''(x_2 = l) = 0$$
$$M_2(x_2 = l) = -EIw_2''(x_2 = l) = M_\mathrm{B}$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

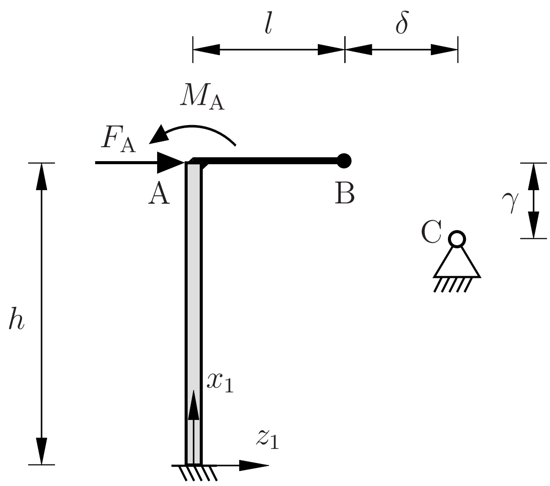
Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 1 (Seite 3 von 3)

c)

Der nebenstehende Kragträger (Länge h, Biegesteifigkeit EI) ist wie dargestellt belastet und am Ende mit einem **starren** Stab der Länge l verschweißt. An dessen Ende, in Punkt B, befindet sich ein Messkopf. Der Kragträger ist als dehnstarr anzunehmen. Gehen Sie von einer geometrisch linearisierten Theorie aus und nehmen Sie an, dass $\delta, \gamma \ll l, h$ gilt.



Geben Sie zunächst die Bedingungen an die Biegelinie $w_1(x_1)$ sowie $w_1'(x_1)$ in allgemeiner Form an, sodass der Messkopf das Auflager im Punkt C berührt. **(1,0 Punkte)**

$$w_1(x_1 = h) = \delta \quad , \qquad w_1'(x_1 = h) = \frac{\gamma}{l}$$

Bestimmen Sie den Biegemomentenverlauf $M_1(x_1)$ bezüglich des vorgegebenen lokalen Koordinatensystems in Abhängigkeit von F_{A} und M_{A}. **(1,0 Punkte)**

$$M_1(x_1) = M_{\mathrm{A}} + [-h + x_1]\ F_{\mathrm{A}}$$

Für das dargestellte System ist die Funktion der Biegelinie zu

$$w_1(x_1) = -\frac{1}{EI}\left[[M_{\mathrm{A}} - h\,F_{\mathrm{A}}]\ \frac{x_1^2}{2} + \frac{1}{6}\,x_1^3\,F_{\mathrm{A}}\right]$$

bestimmt worden. Berechnen Sie die Kraft F_{A}, bei der der Messkopf das Auflager im Punkt C berührt. Das Moment M_{A} ist ebenfalls als eine unbekannte Größe anzusehen. **(2,0 Punkte)**

$$F_{\mathrm{A}} = 12\,EI\,\frac{\delta}{h^3} - 6\,EI\,\frac{\gamma}{h^2\,l}$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

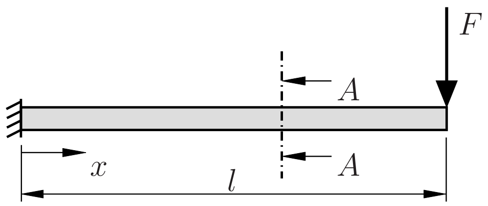
Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

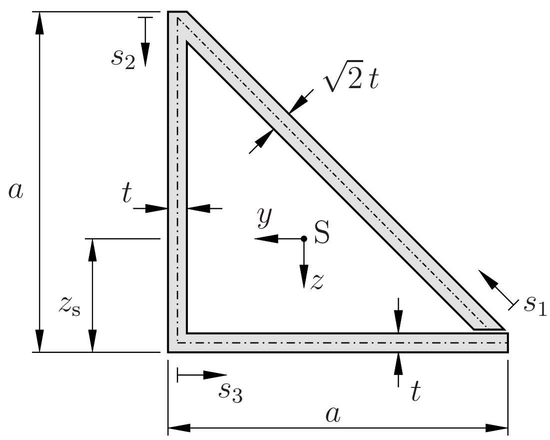
Aufgabe 2 (Seite 1 von 3)

a)

Ein als masselos anzunehmender Balken, bestehend aus einem dünnwandigen Profil ($t \ll a$), ist an der linken Seite eingespannt und wird am rechten Ende durch eine Kraft F belastet, deren Wirklinie durch den Schubmittelpunkt verläuft.



Schnitt $A-A$:



Der Abstand z_{s} des horizontalen Segments zum Schwerpunkt S ist für dieses System bereits zu $z_{\mathrm{s}} = [3/8]\,a$ berechnet worden und das Flächenträgheitsmoment I_y kann als bekannt angenommen werden.

Bestimmen Sie das statische Moment $S_y(s_1)$ bezüglich der Koordinate s_1 für den Teilbereich $0 \leq s_1 \leq \sqrt{2}\,a$. **(1,5 Punkte)**

$$S_y(s_1) \;= t s_1 \left(\frac{3\sqrt{2}}{8}a - \frac{1}{2}s_1\right)$$

Bestimmen Sie das statische Moment $S_y(s_2)$ bezüglich der Koordinate s_2 für den Teilbereich $0 \leq s_2 \leq a$. **(1,5 Punkte)**

$$S_y(s_2) \;= -\frac{a^2 t}{4} + t s_2 \left(-\frac{5}{8}a + \frac{1}{2}s_2\right)$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 2 (Seite 2 von 3)

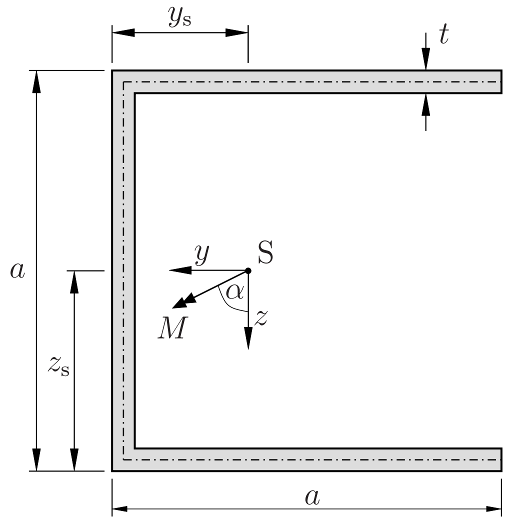
Berechnen Sie die Funktionen der Schubspannung $\tau(s_1)$ bezüglich der Koordinate s_1 für den Teilbereich $0 \leq s_1 \leq \sqrt{2}\,a$ und $\tau(s_2)$ bezüglich der Koordinate s_2 für den Teilbereich $0 \leq s_2 \leq a$. **(2,0 Punkte)**

$$\tau(s_1) = \frac{F}{I_y} s_1 \left(\frac{3}{8}a - \frac{\sqrt{2}}{4} s_1\right)$$

$$\tau(s_2) = \frac{F}{I_y}\left[-\frac{a^2}{4} + s_2\left(-\frac{5}{8}a + \frac{1}{2}s_2\right)\right]$$

b)

Im Folgenden wird ein alternatives Profil betrachtet ($t \ll a$), welches über den gesamten Profilquerschnitt eine konstante Dicke t aufweist. Im Profilschwerpunkt S greift ein Moment M im Winkel $\alpha = [\pi/3]$ an.



Die Werte für t, a, $y_s = [1/3]\,a$ und $z_s = [1/2]\,a$ dürfen als bekannt vorausgesetzt werden. Des Weiteren wurden die Flächenträgheitsmomente des Querschnittes $I_y = [7/12]\,t\,a^3$ und $I_z = [1/3]\,t\,a^3$ bereits berechnet.

Bestimmen Sie die Lage der neutralen Faser über die Funktion $z(y)$. **(2,0 Punkte)**

$$z(y) = \frac{7\sqrt{3}}{12} y$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 2 (Seite 3 von 3)

Nachfolgend wird lediglich die Normalspannung im linken Steg $\sigma_{\text{Steg}}(z) = \sigma_{xx}(y = a/3,\, z)$ betrachtet.
Berechnen Sie den betragsmäßigen Maximalwert der Normalspannung $|\sigma_{\text{Steg}}^{\max}|$ im linken Steg und geben Sie die dazugehörige Koordinate $z^{\max}$ an. **(1,5 Punkte)**

$|\sigma_{\text{Steg}}^{\max}| = \frac{6\sqrt{3}+7}{14}\frac{M}{ta^2}$

$z^{\max} = -\frac{a}{2}$

Nun greift am betrachteten Profil zusätzlich eine Normalkraft N in x-Richtung an. Bestimmen Sie die Größe dieser Normalkraft, so dass der Maximalwert des Betrags der Normalspannung im linken Steg minimal wird. **(1,5 Punkte)**

$N = \frac{3}{2}\frac{M}{a}$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ________________

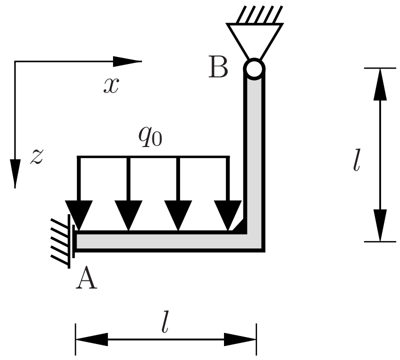
Nachname: ________________

Matr.-Nr.: ________________

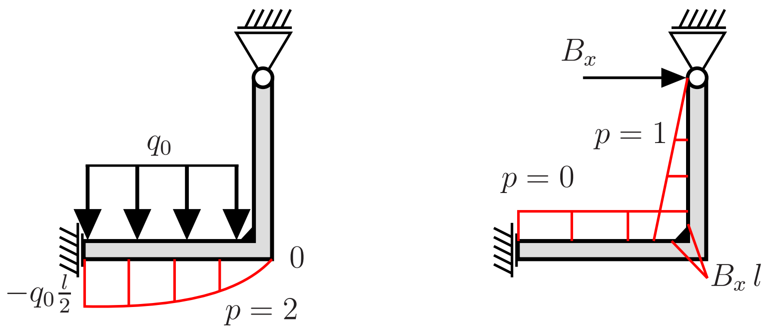
Aufgabe 3 (Seite 1 von 3)

a)

Der rechts abgebildete dehnstarre Rahmen mit der Biegesteifigkeit EI sei wie dargestellt gelagert und das horizontaln Teilstück durch eine kosntante Streckenlast q_0 belastet.



Im nachfolgenden Kästchen ist ein statisch bestimmtes Ersatzsystem abgebildet. Skizzieren Sie den Biegemomentenverlauf des Ersatzsystems einmal in Abhängigkeit von q_0 unter Vernachlässigung der statisch überzähligen Lagerreaktion B$_x$ (links) sowie einmal in Abhängigkeit von B$_x$ unter Vernachlässigung von q_0 (rechts). Geben Sie darüber hinaus charakteristische Werte und die jeweiligen Polynomgrade p der Funktionen an den jeweiligen Teilabschnitten an. **(2,0 Punkte)**



Geben Sie die Formänderungsenergie des System in Abhängigkeit von q_0 und der Lagerreaktion B_x an. Lösen Sie auftretende Integrale **nicht** auf. **(2,0 Punkte)**

$$\Pi = \frac{1}{2\,EI}\left[\int_0^l (B_x\,x)^2\,\mathrm{d}x + \int_0^l \left(B_x\,l + q_0\,\frac{x^2}{2} - q_0\,l\,x\right)^2 \mathrm{d}x\right]$$

Bestimmen Sie die Auflagerkraft B_x. **(2,0 Punkte)**

$$B_x = \frac{1}{4}\,q_0\,l$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

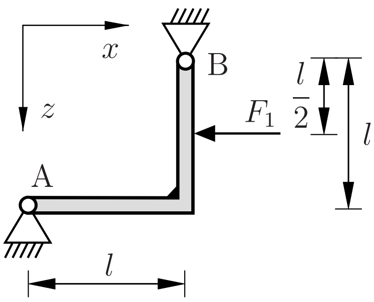
Matr.-Nr.: ____________________

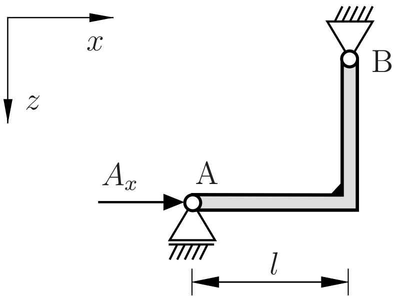
Aufgabe 3 (Seite 2 von 3)

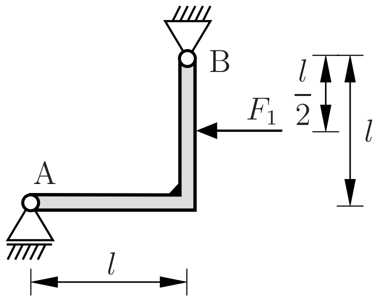
b)

Das nebenstehend abgebildete System wurde zur Bestimmung der Auflagerreaktion A_x zu dem unten abgebildeten, statisch bestimmten Ersatzsystem überführt. Die Gesamtenergie des Systems wurde bestimmt zu

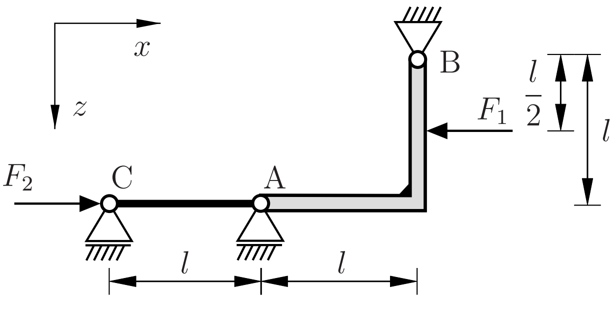
$$\Pi = \frac{l^3}{EI} \left[\frac{1}{3} A_x^2 + \frac{1}{8} F_1^2 - \frac{19}{48} A_x F_1 \right] .$$







Dieses System wird nun durch einen wie dargestellt gelagerten Stab mit der Dehnsteifigkeit EA erweitert, der durch eine weitere Kraft F_2 belastet wird.



Geben Sie an, um welche Länge sich die Verschiebung des Punktes C in Richtung der Kraft F_2 ändern würde, wenn man die Last F_1 verdoppelt. **(1,0 Punkte)**

$$\Delta w_C = -\frac{19}{48} F_1 \frac{l^3}{EI}$$

Bestimmen Sie die Verschiebung des Punktes C in F_2-Richtung in Abhängigkeit von F_1 bei gegebener Last $F_2 = 2\,F_1$. **(2,0 Punkte)**

$$w_C = F_1 \left[\frac{l^3}{EI} \frac{45}{48} + \frac{2\,l}{EA} \right]$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 3 (Seite 3 von 3)

c)

Beschreiben Sie mit **wenigen** Worten, welche Annahme bezüglich des Zusammenhangs zwischen Spannung und Dehnung für den Satz von Betti wesentlich ist und warum.

(1,0 Punkte)

Lineares Materialmodell $\rightarrow$ Superpositionsprinzip anwendbar
$\rightarrow$ (Satz von Schwarz führt auf Vertauschungssatz von Betti)