TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

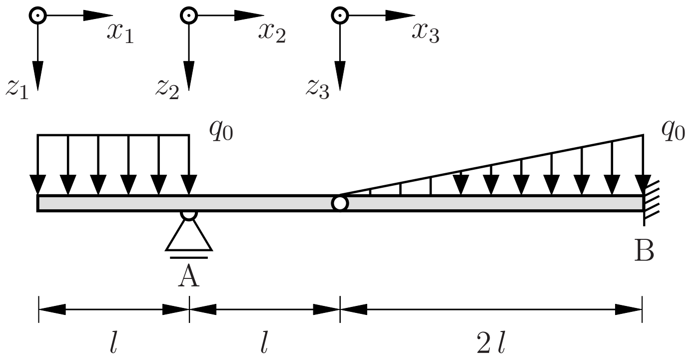
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 1 (Seite 1 von 3)

Das nebenstehende System besteht aus zwei Balken (Biegesteifigkeit EI) und ist wie dargestellt gelagert und belastet. Das Tragwerk wurde gemäß der vorgegebenen lokalen Koordinatensysteme in drei Teilbereiche unterteilt.



a)

Geben Sie die **kinematischen** Übergangsbedingungen an der Stelle $x_1 = l$ (bzw. $x_2 = 0$) sowie an der Stelle $x_2 = l$ (bzw. $x_3 = 0$) an, die zur Bestimmung der Biegelinien $w(x)$ erforderlich sind. Kennzeichnen Sie eindeutig die zugehörigen Bereiche und Koordinatensysteme mit den Indizes 1, 2 bzw. 3. **(2,0 Punkte)**

$w_1(x_1 = l) = w_2(x_2 = 0) = 0$

$w_1'(x_1 = l) = w_2'(x_2 = 0)$

$w_2(x_2 = l) = w_3(x_3 = 0)$

b)

Geben Sie sämtliche **dynamischen** Randbedingungen an der Stelle $x_1 = 0$ an. Verwenden Sie dabei die vorgegebenen Koordinatensysteme mit den Indizes 1, 2 bzw. 3.

(1,0 Punkte)

$M_1(x_1 = 0) = 0$

$Q_1(x_1 = 0) = 0$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

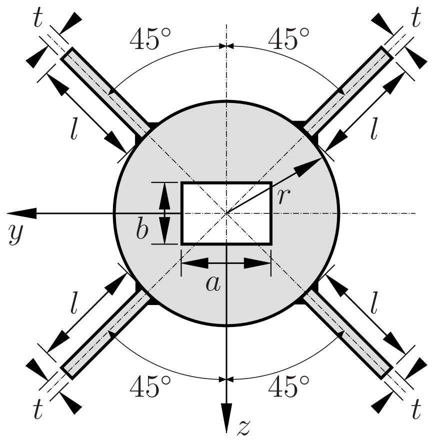
Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 1 (Seite 2 von 3)

c)

Das nebenstehende Profil besteht aus einem Vollkreis (Radius r) mit einem rechteckigen Hohlraum (Kantenlängen a, b), wobei die beiden Flächenschwerpunkte zusammenfallen. Darüber hinaus sind vier als dünn anzunehmende Rippen (Länge l, Dicke $t \ll l$) am Umfang des Kreisprofils wie dargestellt angeordnet. Das dargestellte Koordinatensystem liegt im Schwerpunkt des Profils.

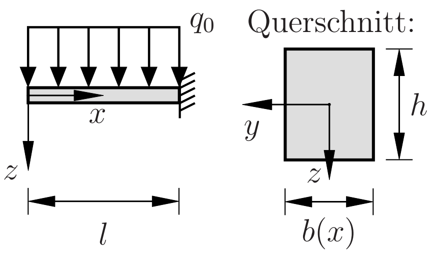


Berechnen Sie das auf das angegebene Koordinatensystem bezogene Flächenträgheitsmoment I_y des Profils. **(3,0 Punkte)**

$$I_y = \frac{\pi\, r^4}{4} - \frac{b^3\, a}{12} + 4\left[\frac{l^3\, t}{24} + \frac{l\, t}{2}\left[r + \frac{l}{2}\right]^2\right]$$

d)

Der nebenstehend abgebildete Kragträger (Länge l) ist mit einer konstanten Streckenlast q_0 belastet und weist einen rechteckigen Querschnitt mit konstanter Höhe h sowie veränderlicher Breite $b(x)$ auf. Die Festigkeit des Materials wird durch eine zulässige Spannung σ_{zul} charakterisiert.



Dimensionieren sie $b(x)$ so, dass an jeder Stelle x gilt: $\max(\sigma_{xx}(x,z)) = \sigma_{\text{zul}}$. Geben Sie Ihre Lösung in Abhängigkeit der gegebenen Größen an. **(2,0 Punkte)**

$$b(x) = \frac{3\, q_0\, x^2}{\sigma_{\text{zul}}\, h^2}$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

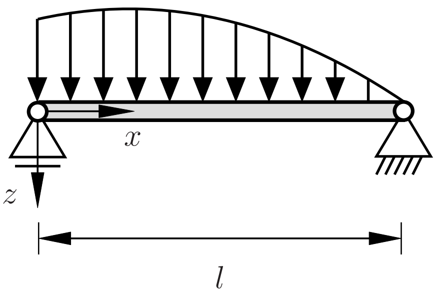
Aufgabe 1 (Seite 3 von 3)

e)

Der nebenstehend abgebildete Balken (Länge l, Biegesteifigkeit EI) ist mit einer veränderlichen Streckenlast $q(x)$ wie dargestellt belastet. Das Biegemoment ergibt sich hierbei zu

$$M(x) = \frac{q_0}{4}\left[\frac{x^4}{3\,l^2} - \frac{x^3}{3\,l} - x^2 + x\,l\right].$$

$$q(x) = q_0\left[-\left[\frac{x}{l}\right]^2 + \frac{x}{2\,l} + \frac{1}{2}\right]$$



Berechnen Sie die Funktion der Biegelinie des Balkens $w(x)$ mit Angabe der Werte der Integrationskonstanten. **(2,0 Punkte)**

$$w(x) = -\frac{1}{EI}\left[\frac{q_0\,x^6}{360\,l^2} - \frac{q_0\,x^5}{240\,l} - \frac{q_0\,x^4}{48} + \frac{q_0\,x^3\,l}{24} - \frac{7\,q_0\,l^3\,x}{360}\right]$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

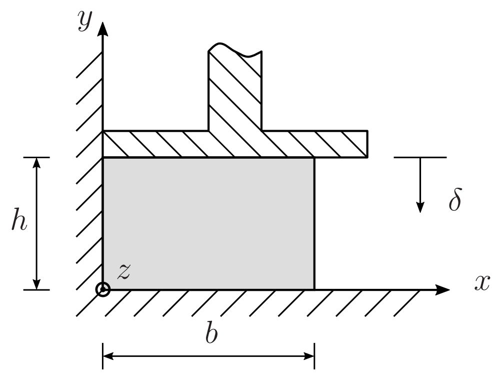
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 2 (Seite 1 von 2)

a)
Wie nebenstehend dargestellt wird eine Stauchprobe der Höhe h, Breite b und Dicke t durch Verfahren einer starren Druckplatte um einen vorgegebenen Weg δ gestaucht. Die Probe kann sich bei diesem Prozess ungehindert in z-Richtung ausdehnen. Ferner ist die Reibung zwischen Probe und Werkzeug zu vernachlässigen.



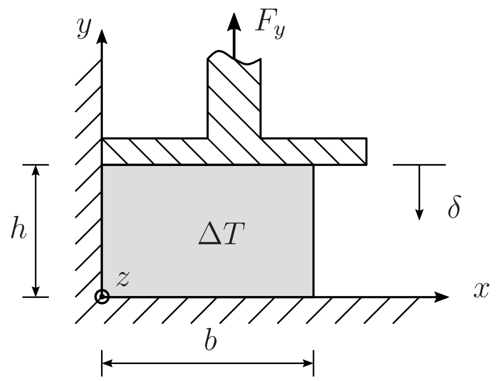
Bestimmen Sie den ε_{xx}- und den ε_{yy}-Koeffizienten des Verzerrungstensors sowie den σ_{yy}-Koeffizienten des Spannungstensors unter der Annahme isotropen, linear-elastischen Materialverhaltens (E-Modul E, Poissonsche Zahl ν). **(3,0 Punkte)**

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\delta}{h}\,\nu$$

$$\varepsilon_{yy} = -\frac{\delta}{h}$$

$$\sigma_{yy} = -\frac{\delta}{h}\,E$$

b)
Für den in Aufgabenteil a) beschriebenen Prozess gelte im Folgenden $\delta = 0$, d. h. die Druckplatte soll stets ihre Position beibehalten. Die Probe wird nun um eine Temperaturdifferenz ΔT erwärmt und weist einen Temperaturausdehnungskoeffizienten α_T auf.



Bestimmen Sie die von der Maschine aufzubringende Kraft F_y unter diesen Voraussetzungen und unter der Annahme kleiner Verformungen. **(2,0 Punkte)**

$$F_y = -E\,\alpha_T\,\Delta T\,b\,t$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 2 (Seite 2 von 2)

c) Bezüglich einer kartesischen Basis wurde das Verschiebungsfeld $\boldsymbol{u}$ eines nicht näher spezifizierten Körpers zu

$$\boldsymbol{u}\,(x, y, z) = 2\,\alpha\,y\,\boldsymbol{e}_x + \beta\,y\,\boldsymbol{e}_y + \gamma\,z\,\boldsymbol{e}_z$$

ermittelt, wobei α, β und γ Konstanten darstellen.

Bestimmen Sie die Koeffizientenmatrix des Verzerrungstensors $\boldsymbol{\varepsilon}$ bezüglich der kartesischen Basis $\boldsymbol{e}_x$-$\boldsymbol{e}_y$-$\boldsymbol{e}_z$. **(2,0 Punkte)**

$$[\boldsymbol{\varepsilon}]_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ \alpha & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix}$$

Wie muss unter der Annahme eines isotropen linear-elastischen Materialverhaltens (E-Modul E, Poissonsche Zahl ν) der Parameter γ gewählt werden, sodass sich ein ebener Spannungszustand in der x-y-Ebene einstellt? **(1,5 Punkte)**

$$\gamma = -\frac{\nu}{1-\nu}\,\beta$$

d) Für eine reine Scherdeformation ergibt sich die Koeffizientenmatrix des Spannungstensors zu

$$[\boldsymbol{\sigma}]_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & \eta\,G & 0 \\ \eta\,G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

wobei G den Schubmodul darstellt.

Wie groß darf die Scherung $\eta > 0$ maximal werden, sodass nach der Gestaltsänderungshypothese mit einer zulässigen Spannung σ_{zul} kein Versagen auftritt? **(1,5 Punkte)**

$$\eta \leq \frac{1}{\sqrt{3}G}\,\sigma_{\text{zul}}$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

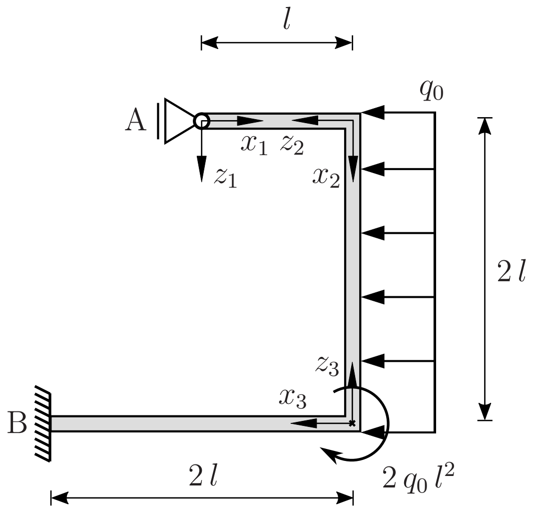
Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

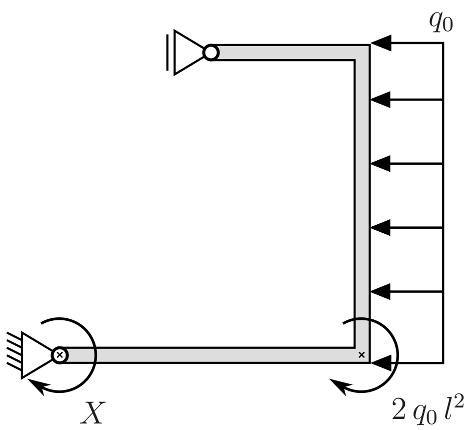
Aufgabe 3 (Seite 1 von 4)

a)

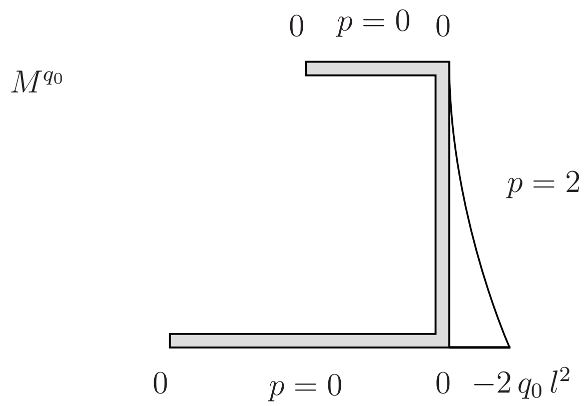
Der auf der linken Seite dargestellte Rahmen (Biegesteifigkeit EI) ist wie dargestellt gelagert und wird mit einer konstanten Streckenlast sowie einem Moment $2\,q_0\,l^2$ belastet. Im rechten Bild ist ein statisch bestimmtes Ersatzsystem mit dem statisch überzähligen Auflagermoment X vorgegeben. Anteile aus Normal- und Schubverformung sind in diesem Aufgabenteil zu vernachlässigen.



Ersatzsystem:



Zeichnen Sie den Biegemomentenverlauf M^{q_0} des statisch bestimmten Ersatzsystems bezüglich der vorgegebenen lokalen Koordinatensysteme für $X = 0$ unter Angabe charakteristischer Werte in die nachfolgende Skizze ein. Geben Sie darüber hinaus den jeweiligen Polynomgrad p der Funktion an. **(2,0 Punkte)**



TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

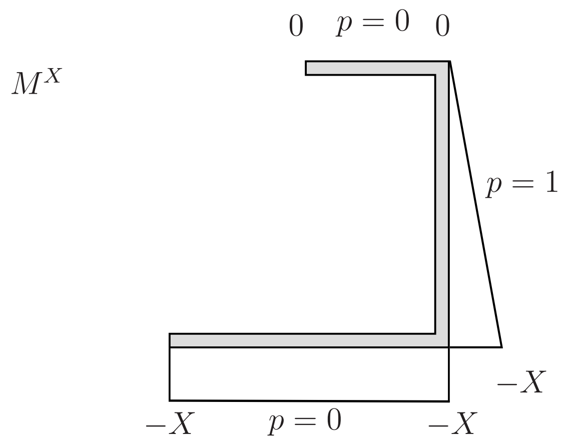
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 3 (Seite 2 von 4)

Zeichnen Sie den Biegemomentenverlauf M^X des statisch bestimmten Ersatzsystems bezüglich der vorgegebenen lokalen Koordinatensysteme in Abhängigkeit von X und für $q_0 = 0$ unter Angabe charakteristischer Werte in die nachfolgende Skizze ein. Geben Sie darüber hinaus den jeweiligen Polynomgrad p der Funktion an. **(1,5 Punkte)**



Geben Sie die im System gespeicherte Gesamtenergie Π als Summe einzelner (nicht zu vernachlässigender) Integrale an. Geben Sie dabei die konkreten Integrationsgrenzen an und verwenden Sie die allgemeinen Ausdrücke M^{q_0} sowie M^X für die Schnittgrößenfunktionen. Die tatsächlichen Funktionen der Schnittgrößen sollen hier nicht eingesetzt werden. **(1,5 Punkte)**

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_0^{2l} \frac{\left[M^{q_0}(x_2) + M^X(x_2) \right]^2}{EI}\,\mathrm{d}x_2 + \frac{1}{2}\int_0^{2l} \frac{\left[M^X(x_3) \right]^2}{EI}\,\mathrm{d}x_3$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

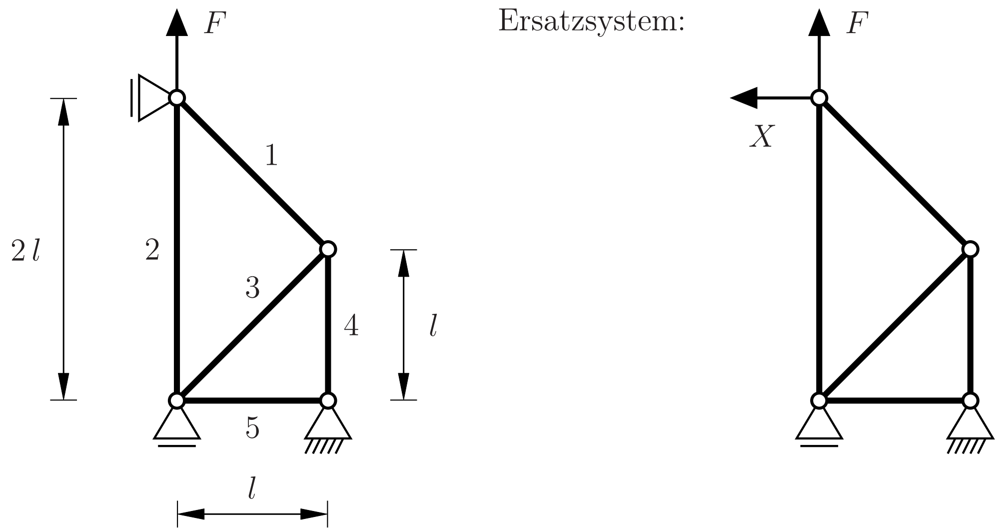
Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 3 (Seite 3 von 4)

b)

Das unten abgebildete Fachwerk ist wie dargestellt gelagert und wird durch die Kraft F belastet. Sämtliche Fachwerkstäbe weisen die Dehnsteifigkeit EA auf. Die Abmessungen sind der Zeichnung zu entnehmen. Im rechten Bild wurde die statisch überzählige Kraft X wie eingezeichnet gewählt.



Die Stabkräfte sind wie folgt für das Ersatzsystem vorgegeben:

in Abhängigkeit von F für $X = 0$:

$$S_1^F = 0$$
$$S_2^F = F$$
$$S_3^F = 0$$
$$S_4^F = 0$$
$$S_5^F = 0$$

in Abhängigkeit von X für $F = 0$:

$$S_1^X = \sqrt{2}\,X$$
$$S_2^X = -X$$
$$S_3^X = -\sqrt{2}X$$
$$S_4^X = 2\,X$$
$$S_5^X = X$$

Berechnen Sie die statisch überzählige Kraft X. Tragen Sie dazu die wichtigsten Zwischenschritte sowie das endgültige Ergebnis in das Kästchen auf der nachfolgenden Seite ein. Es ist darauf zu achten, dass der Lösungsweg schlüssig und vollständig dargestellt wird. **(3,5 Punkte)**

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 3 (Seite 4 von 4)

Lösung zu Aufgabenteil b):

$$\Pi = \sum_i \frac{l_i\, S_i^2}{2\,E\,A}, \qquad l_1 = \sqrt{2}\,l, \quad l_2 = 2\,l, \quad l_3 = \sqrt{2}\,l, \quad l_4 = l, \quad l_5 = l$$
$$= \frac{1}{2\,E\,A}\left[\sqrt{2}\,l\,2\,X^2 + 2\,l\,(F-X)^2 + \sqrt{2}\,l\,2\,X^2 + l\,4\,X^2 + l\,X^2\right]$$

Anwendung des Satzes von Castigliano:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial X} = 0$$
$$= \frac{1}{2\,E\,A}\left[8\,\sqrt{2}\,l\,X - 4\,l\,(F-X) + 10\,l\,X\right]$$
$$= \frac{1}{2\,E\,A}\left[8\,\sqrt{2}\,l\,X + 14\,l\,X - 4\,l\,F\right]$$

Umstellen nach X liefert:

$$X = \frac{4\,F}{8\,\sqrt{2} + 14}$$

c)

Bestimmen Sie die vertikale Verschiebung f_F des Kraftangriffspunktes von F. Die statisch überzählige Kraft X ist dabei als bekannt vorauszusetzen. **Hinweis**: Es soll nicht mit dem Ergebnis für X aus der vorherigen Teilaufgabe weitergerechnet werden. (**1,5 Punkte**)

$$f_F = \sum_i \frac{S_i\,\bar{S}_i}{E\,A} l_i = \frac{(F-X)\,1}{E\,A} 2\,l$$