TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

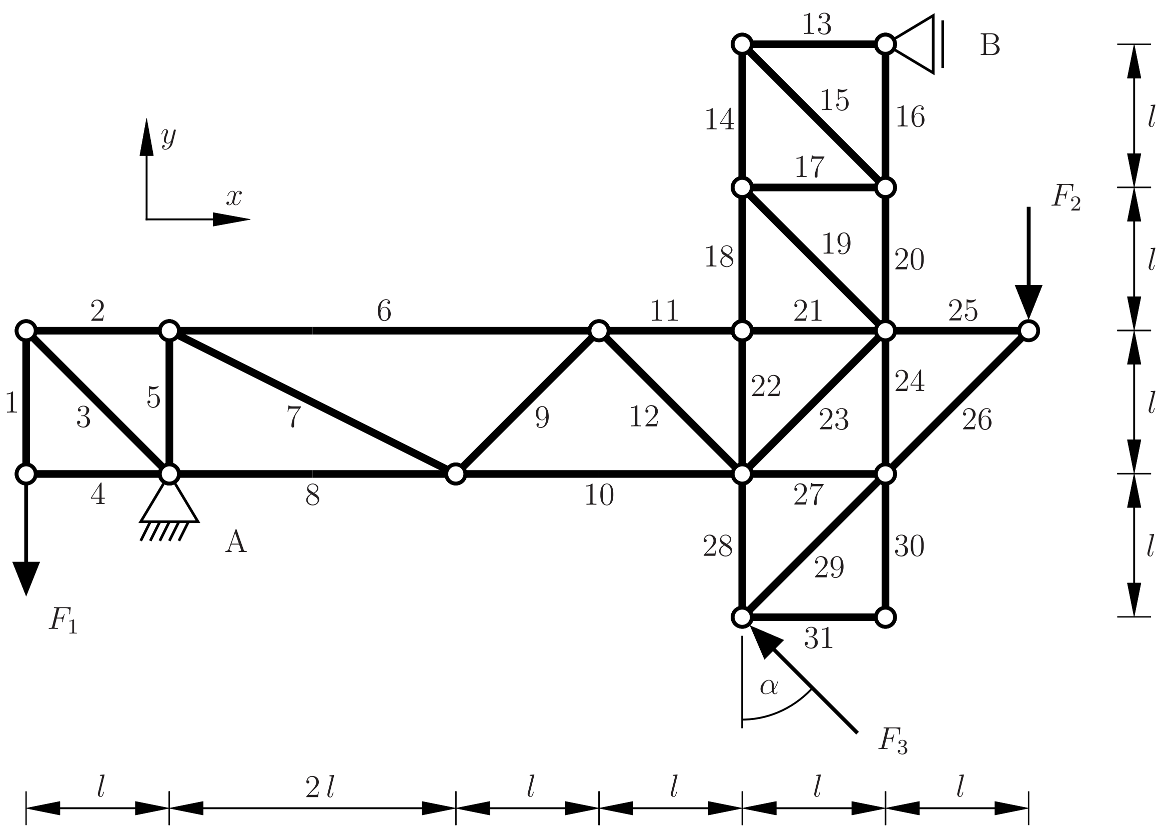
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 1 (Seite 1 von 3)

Das hier dargestellte Fachwerk ist in den Punkten A und B gelagert und wird durch die Einzelkräfte F_1, F_2 und F_3 belastet. Für den Winkel α gelte $0 < \alpha < 90°$.



a)
Geben Sie sämtliche Nullstäbe an, welche aufgrund gängiger Kriterien direkt als solche identifiziert werden können (keine Rechnung). **(2,0 Punkte)**
Hinweis: Das Nennen falscher Stabnummern führt zu Punktabzug.

S_4, S_{16}, S_{30}, S_{31}

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 1 (Seite 2 von 3)

b)
Berechnen Sie die Auflagerreaktionen in den Punkten A und B in Abhängigkeit von F_1, F_2, F_3 und α bezüglich der durch das vorgegebene Koordinatensystem als positiv definierten Richtungen. **(3,0 Punkte)**

$$A_x = -\frac{1}{3}\,F_1 + 2\,F_2 + \frac{4}{3}\,F_3\,[\sin(\alpha) - \cos(\alpha)]$$

$$A_y = F_1 + F_2 - F_3\,\cos(\alpha)$$

$$B_x = \frac{1}{3}\,F_1 - 2\,F_2 - \frac{1}{3}\,F_3\,\sin(\alpha) + \frac{4}{3}\,F_3\,\cos(\alpha)$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

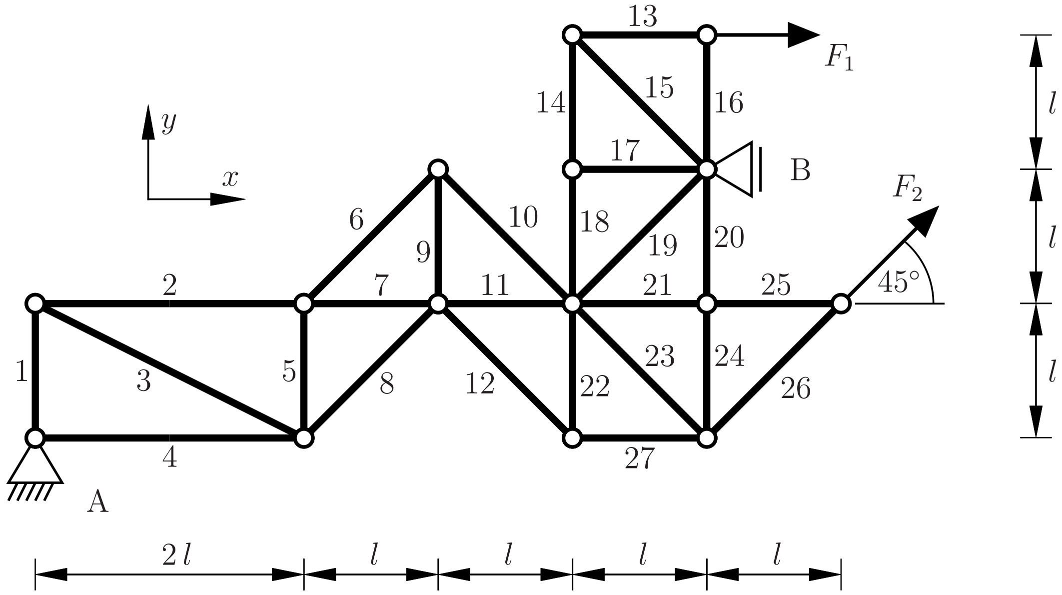
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 1 (Seite 3 von 3)

c)
Das hier dargestellte Fachwerk ist in den Punkten A und B gelagert und wird durch die Einzelkräfte F_1 und F_2 belastet.



Für das Fachwerk ergeben sich daraus die Auflagerreaktionen gemäß der durch das vorgegebene Koordinatensystem als positiv definierten Richtungen zu

$$A_x = \frac{1}{2}\,F_1 \;-\frac{7\sqrt{2}}{4}\,F_2\,, \quad A_y = -\frac{\sqrt{2}}{2}\,F_2 \quad \text{und} \quad B = -\frac{3}{2}\,F_1 \;+\frac{5\sqrt{2}}{4}\,F_2\,.$$

Ferner sei die Stabkraft S_{24} bereits zu

$$S_{24} = -\frac{1}{2}\,F_1 \;-\frac{5\sqrt{2}}{4}\,F_2$$

bestimmt worden. Berechnen Sie die Stabkräfte $S_6\,, S_7\,, S_8\,, S_{23}$ und S_{27} in Abhängigkeit von F_1 und F_2 unter Berücksichtigung der Konvention positiver Zugkräfte.**(5,0 Punkte)**

$$S_6 = \frac{\sqrt{2}}{2}\,F_1 - \frac{1}{2}\,F_2 \qquad S_{23} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,F_1 + \frac{3}{2}\,F_2$$

$$S_7 = -\frac{1}{2}\,F_1 + \frac{5\sqrt{2}}{4}\,F_2 \qquad S_{27} = -\frac{1}{2}\,F_1 - \frac{\sqrt{2}}{4}\,F_2$$

$$S_8 = -\frac{\sqrt{2}}{2}\,F_1 + \frac{3}{2}\,F_2$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

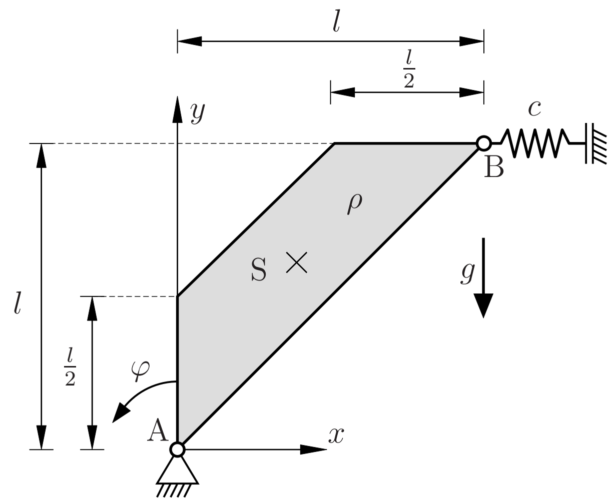
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 2 (Seite 1 von 4)

a)
Das dargestellte System befindet sich im Schwerefeld der Erde. Eine homogene Scheibe mit konstanter Dicke t ist wie dargestellt im Punkt A drehbar gelagert und im Punkt B mit einer Feder der Federsteifigkeit c verbunden. Sämtliche weitere relevanten Größen sind der Skizze zu entnehmen.



Bestimmen Sie die Massenschwerpunktkoordinaten x_{S} und y_{S} des dargestellten Körpers mit konstanter Dichte ρ bezüglich des vorgegeben x-y-Koordinatensystems.

(1,0 Punkte)

$x_{\mathrm{S}} = \frac{7}{18}\,l$

$y_{\mathrm{S}} = l - x_{\mathrm{S}} = \frac{11}{18}\,l$

b)
Im Folgenden seien die Schwerpunktkoordinaten x_{S} und y_{S} als bekannt vorausgesetzt. Geben Sie die virtuellen Verrückungen $\delta\boldsymbol{r}_{\mathrm{B}}$ von B und $\delta\boldsymbol{r}_{\mathrm{S}}$ von S im Bezug auf das gegebene Koordinatensystem und den Freiheitsgrad φ unter der Voraussetzung kleiner Auslenkungen aus der dargestellten Lage ($\varphi = 0$) an. Setzen Sie dabei nicht die Ergebnisse der letzten Teilaufgabe ein.

(2,0 Punkte)

$\delta\boldsymbol{r}_{\mathrm{B}} = -l\,\delta\varphi\,\boldsymbol{e}_x \;+\; l\delta\varphi\,\boldsymbol{e}_y$

$\delta\boldsymbol{r}_{\mathrm{S}} = -y_{\mathrm{S}}\,\delta\varphi\,\boldsymbol{e}_x \;+\; x_{\mathrm{S}}\,\delta\varphi\,\boldsymbol{e}_y$

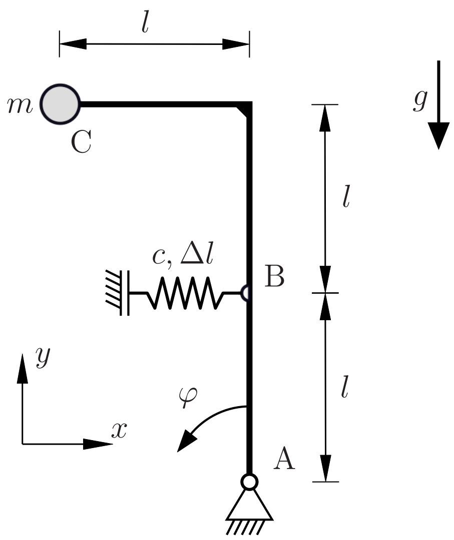
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 2 (Seite 2 von 4)

c)
Ein weiteres hier dargestelltes System befindet sich im Schwerefeld der Erde. Ein masselos anzunehmender Rahmen ist in Punkt A gelagert und in Punkt B mit einer Feder der Steifigkeit c verbunden. Die Feder ist in der dargestellten Lage ($\varphi = 0$) bereits um eine Länge Δl gestaucht. Am Punkt C befindet sich eine Punktmasse m. Sämtliche weitere relevanten Größen sind der Skizze zu entnehmen.



Geben Sie die virtuelle Arbeit $\delta W\,(\delta\varphi)$ in Bezug auf den Freiheitsgrad φ und das vorgegebene x-y-Koordinatensystem an. Dabei seien die virtuellen Verrückungen als

$$\delta \boldsymbol{r}_\mathrm{B} = -l\,\delta\varphi\,\boldsymbol{e}_x\,, \qquad \delta \boldsymbol{r}_\mathrm{C} = -2\,l\,\delta\varphi\,\boldsymbol{e}_x - l\,\delta\varphi\,\boldsymbol{e}_y$$

gegeben. **(1,0 Punkte)**

$\delta W\,(\delta\varphi) = l\,m\,g\,\delta\varphi - c\,\Delta l\,l\,\delta\varphi$

Geben Sie die Bedingung für Gleichgewicht in der Lage $\varphi = 0$ an und berechnen Sie die Masse m, für die sich das System im Gleichgewicht befindet. **(1,0 Punkte)**

Gleichgewichtsbedingung für $\varphi = 0$:

$[\delta W\,(\delta\varphi)]_{\varphi=0} = 0$

$m = \frac{c\,\Delta l}{g}$

TU Dortmund

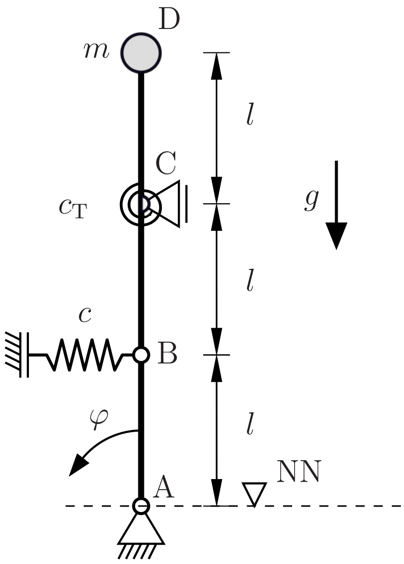
Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

d)
Das dargestellte, im Schwerefeld der Erde befindliche System besteht aus zwei in Punkt B miteinander verbundenen masselosen Stäben. In Punkt B ist das System mit einer Feder (Federsteifigkeit c) verbunden. Die Stäbe sind in A und C wie dargestellt gelagert. Außerdem ist in Punkt C eine Drehfeder (Federsteifigkeit c_T) angebracht. Beide Federn sind in der dargestellten Lage ($\varphi = 0$) ungespannt. In Punkt D befindet sich eine Punktmasse m. Sämtliche relevanten Größen sind der Skizze zu entnehmen.



Stellen Sie das Gesamtpotetnial $\Pi\,(\varphi)$ in Abhängigkeit des Freiheitsgrades φ und bezogen auf das angegebene Nullniveau NN auf. **(1,0 Punkte)**

$$\Pi\,(\varphi) = 3\,l\,\cos(\varphi)\;m\,g + \tfrac{1}{2}\,c\,\sin^2(\varphi)\;l^2 + \tfrac{1}{2}\,c_\mathrm{T}\,\varphi^2$$

Geben Sie die eindeutige, auf das vorgegebene System spezifizierte Bedingung für die Existenz einer Gleichgewichtslage basierend auf $\Pi\,(\varphi)$ an. Lösen Sie dabei nicht nach dem Freiheitsgrad auf! **(1,0 Punkte)**

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = -3\,l\,\sin(\varphi)\;m\,g + c\,l^2\,\sin(\varphi)\cos(\varphi) + c_\mathrm{T}\,\varphi \overset{!}{=} 0$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 2 (Seite 4 von 4)

e)
Für ein weiteres, nicht näher spezifiziertes System, mit dem Freiheitsgrad φ sei das Gesamtpotential gegeben als

$$\widetilde{\Pi}\,(\varphi) = m\,g\,l\,\sin(\varphi) + \frac{1}{2}\,c\,l^2\,\cos^2(\varphi) + \frac{1}{2}\,c_\mathrm{T}\,(2\,\varphi)^2.$$

Die Ableitung nach dem Freiheitsgrad ergibt sich zu

$$\frac{\partial\widetilde{\Pi}}{\partial\varphi} = m\,g\,l\,\cos(\varphi) - c\,l^2\,\sin(\varphi)\cos(\varphi) + 4\,c_\mathrm{T}\,\varphi.$$

Anhand welcher eindeutigen, auf das gegebene Potential bezogenen, Bedingung lässt sich eine Gleichgewichtslage des zugrunde liegenden Systems als stabil bezeichnen?

(1,0 Punkte)

$\frac{\partial^2\widetilde{\Pi}}{\partial\varphi^2} = -l\,\sin(\varphi)\;m\,g - c\,l^2\,\cos^2(\varphi) + c\,l^2\,\sin^2(\varphi) + 4\,c_\mathrm{T} > 0$

Wie lauten sämtliche Gleichgewichtslagen bezüglich φ im Bereich $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ für den Fall $l = 0{,}1\,\mathrm{m}$, $m = 10\,\mathrm{kg}$, $g = 10\,\mathrm{N/kg}$, $c = 2000\,\mathrm{N/m}$ und $c_\mathrm{T} = 0\,\mathrm{Nm}$? Geben Sie zudem an, welche Art des Gleichgewichts jeweils vorliegt.

(2,0 Punkte)

$\Rightarrow$ Die Gleichgewichtslagen sind: $\varphi = \arcsin\left(\frac{m\,g}{c\,l}\right) = \frac{\pi}{6} \mathrel{\widehat{=}} 30^\circ$ oder $\varphi = \frac{\pi}{2} \mathrel{\widehat{=}} 90^\circ$

$\left[\frac{\partial^2\widetilde{\Pi}}{\partial\varphi^2}\right]_{\varphi=\frac{\pi}{6}} = -\frac{l\,m\,g}{2} - \frac{3\,c\,l^2}{4} + \frac{c\,l^2}{4} + 4\,c_\mathrm{T} = -15\,\mathrm{Nm} < 0 \Rightarrow$ Instabil

$\left[\frac{\partial^2\widetilde{\Pi}}{\partial\varphi^2}\right]_{\varphi=\frac{\pi}{2}} = -l\,m\,g + c\,l^2 + 4\,c_\mathrm{T} = 10\,\mathrm{Nm} > 0 \Rightarrow$ Stabil

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

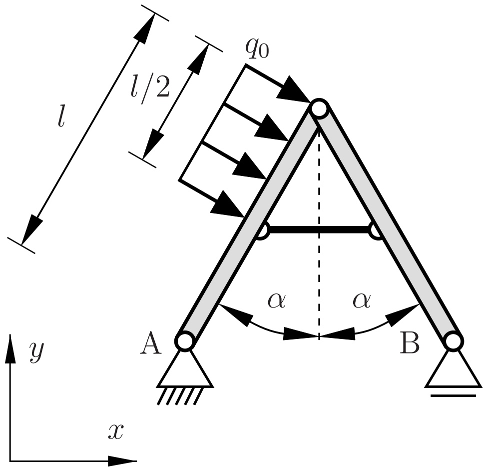
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

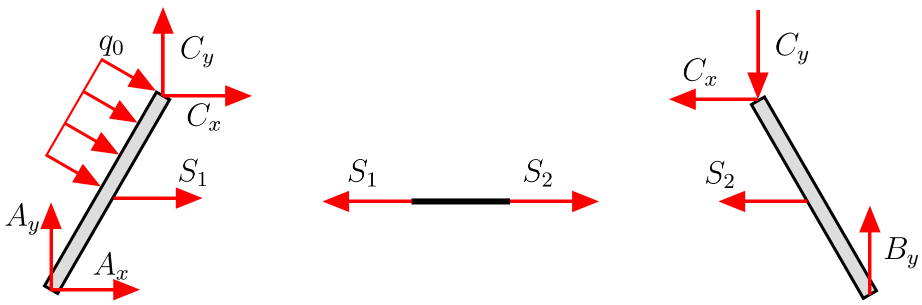
Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 3 (Seite 1 von 3)

a) Das nebenstehende System besteht aus zwei gelenkig miteinander verbundenen Balken der Länge l, welche zusätzlich durch einen Stab in der Mitte gestützt werden. Der Öffnungswinkel zwischen den Balken beträgt $2\,\alpha = 2\,\pi/6$. Am linken Stab greift wie dargestellt eine Linienlast q_0 an. Die Lagerungen sind der Abbildung zu entnehmen.



Ergänzen Sie folgende Abbildung zu einem vollständigen Freikörperbild. **(1,0 Punkte)**



Bestimmen Sie die Auflagerreaktionen an den Punkten A und B bezogen auf die durch das x, y-Koordinatensystem positiv definierten Koordinatenrichtungen. **(1,5 Punkte)**

$$A_x = -\frac{\sqrt{3}}{4}\,q_0\,l$$

$$A_y = -\frac{1}{8}\,q_0\,l$$

$$B_y = \frac{3}{8}\,q_0\,l$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

Vorname: ____________________

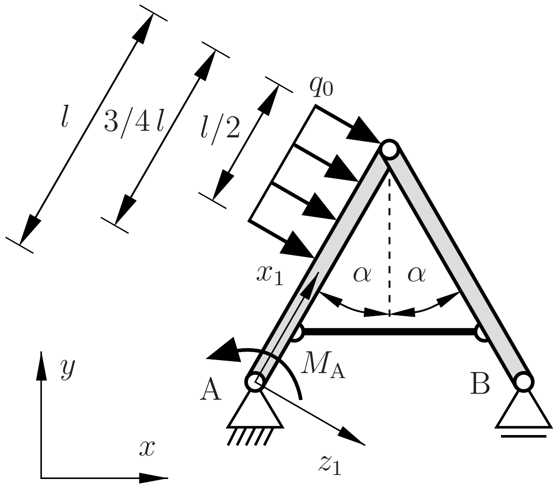
Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 3 (Seite 2 von 3)

b) Das System wurde nun wie abgebildet modifiziert. In Punkt A greift ein Moment $M_\mathrm{A} = 7/8\, q_0\, l^2$ an und der Verbindungsstab liegt nun tiefer. Die Auflagerreaktionen in Bezug auf die durch das x, y-Koordinatensystem positiv definierten Koordinatenrichtungen sowie die Zugstabkraft sind bereits bestimmt zu

$$A_x = -\sqrt{3}/4\, q_0\, l\,,$$
$$A_y = 3/4\, q_0\, l\,,$$
$$B_y = -1/2\, q_0\, l\,,$$
$$S = \sqrt{12}/9\, q_0\, l\,.$$



Bestimmen Sie die Funktion der Querkraft im linken Balken bezogen auf das lokale x_1, z_1-Koordinatensystem für die drei unten genannten Bereiche. **(3,0 Punkte)**

$$0 \le x_1 < l/4: \; Q(x_1) = \frac{3}{4}\, q_0\, l$$

$$l/4 \le x_1 < l/2: \; Q(x_1) = \frac{3}{4}\, q_0\, l - \frac{6}{18}\, q_0\, l \; = \; \frac{5}{12}\, q_0\, l$$

$$l/2 \le x_1 \le l \quad : \; Q(x_1) = \frac{5}{12}\, q_0\, l - q_0 \left[x_1 - \frac{1}{2}\, l \right]$$

TU Dortmund

Fakultät Maschinenbau
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. A. Menzel
Prof. Dr.-Ing. J. Mosler

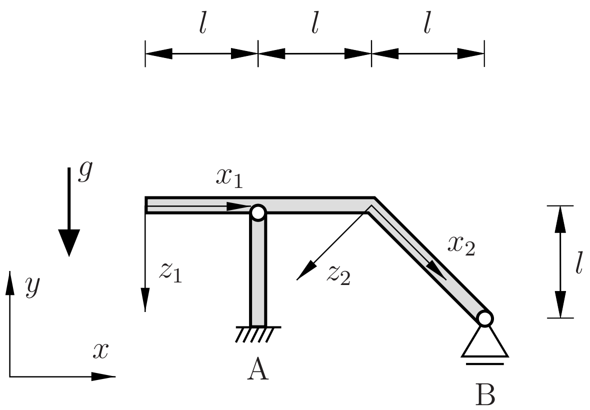
Vorname: ____________________

Nachname: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Aufgabe 3 (Seite 3 von 3)

c) Das nebenstehende System befindet sich im Schwerefeld der Erde. Es besteht aus zwei Balken mit der längenspezifischen Dichte $\rho = m/l$. Der obere Balken ist verschieblich in Punkt B gelagert und wird wie abgebildet vom anderen, fest in Punkt A eingespannten Balken abgestützt. Die Lagerreaktionen sind wie folgt bestimmt, bezogen auf die positiven Koordinatenrichtungen des x, y-Koordinatensystems.



$$A_x = 0 \qquad A_y = \left[3 + \frac{\sqrt{2}}{4}\right] m\,g \qquad M_\mathrm{A} = 0 \qquad B_y = \sqrt{2}\,\frac{3}{4}\,m\,g$$

Geben Sie qualitativ die Verläufe der Normalkraft sowie des Biegemoments für den oberen Balken an. Ergänzen Sie Ihre Skizze um charakteristische Werte an den Positionen $x_1 = 0$, $x_1 = l$, $x_1 = 2\,l$ sowie $x_2 = 0$ und $x_2 = \sqrt{2}\,l$. Geben Sie zusätzlich für jeden Abschnitt den Polynomgrad p der entsprechenden Funktion an. (**4,5 Punkte**)